

I. megoldás. Mindkét egyenletet négyzetre emeljük, majd a kapott egyenleteket összeadjuk. A $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ azonosság figyelembe vételével kapjuk, hogy

$$3 + 2(\cos x \cos y + \cos x \cos z + \cos y \cos z) + \\ + 2(\sin x \sin y + \sin x \sin z + \sin y \sin z) = \frac{27}{4} + \frac{9}{4} = \frac{36}{4} = 9;$$

ebből:

$$(\cos x \cos y + \sin x \sin y) + (\cos x \cos z + \sin x \sin z) + (\cos y \cos z + \sin y \sin z) = 3.$$

A $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$ addíciós képletet mind a három tagra alkalmazva: $\cos(x - y) + \cos(x - z) + \cos(y - z) = 3$. Mivel a $\cos$ függvény értéke nem lehet nagyobb, mint 1, ez az egyenlet csak úgy teljesülhet, ha $\cos(x - y) = \cos(x - z) = \cos(y - z) = 1$, azaz $(x - y)$, $(x - z)$, $(y - z)$ a 2π egész számú többszörösei:

$$y = x + 2k_2\pi; \quad z = x + 2k_3\pi,$$

ahol k_2, k_3 tetszőleges egész számok. Ekkor $\cos x = \cos y = \cos z$ és $\sin x = \sin y = \sin z$; mindezt az eredeti egyenletekbe beírva:

$$\cos x + \cos x + \cos x = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \sin x + \sin x + \sin x = \frac{3}{2},$$

más szóval

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin x = \frac{1}{2};$$

ebből:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi,$$

ahol k_1 tetszőleges egész szám. Tehát a megoldás:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi, \quad y = \frac{\pi}{6} + 2k_2\pi, \quad z = \frac{\pi}{6} + 2k_3\pi,$$

ahol k_1, k_2, k_3 tetszőleges egész számok.

II. megoldás. Képzeljük el a feladatot úgy, mintha a komplex számsíkon három, egységnyi hosszúságú vektor összegeként kellene előállítani a $\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$ vektort. Bevezetve ugyanis az $s = \cos x + i\sin x$, $t = \cos y + i\sin y$, $u = \cos z + i\sin z$ egységnyi hosszú komplex ismeretleneket, az $s + t + u = \frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$ egyenlet a komplex számok körében éppen azt jelenti, hogy az egyenlet bal oldalának valós része, $\cos x + \cos y + \cos z$ egyenlő a jobb oldal valós részével, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ -vel, és az egyenlet bal oldalának képzetes része, $\sin x + \sin y + \sin z$ egyenlő a jobb oldal képzetes részével, $\frac{3}{2}$ -del; ezek pedig éppen a feladat egyenletei.

Írjuk fel az $s + t + u = \frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$ összegre a háromszög-egyenlőtlenséget:

$$3 = |s| + |t| + |u| \geq |s + t + u| = \left| \frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 3.$$

A kapott egyenlőség éppen azt jelenti, hogy az s, t, u vektorok párhuzamosak és egyenlő állásúak, így $|s| = |t| = |u| = 1$ miatt $s = t = u$, ezért

$$s = t = u = \frac{1}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

Tehát $\cos x = \cos y = \cos z = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin x = \sin y = \sin z = \frac{1}{2}$, azaz a megoldás:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad y = \frac{\pi}{6} + 2m\pi, \quad z = \frac{\pi}{6} + 2n\pi,$$

ahol k, m, n tetszőleges egész számok.