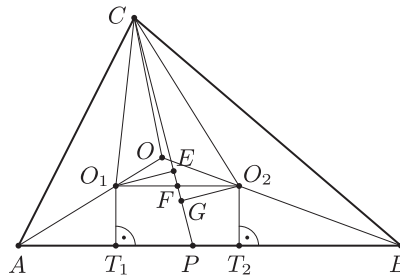


Megoldás. Tekintsük a feladatot megoldottnak. Az 1. ábra jelöléseinek megfelelően legyen az ABC szögfelezőinek metszéspontja O , az APC háromszög beírt körének középpontja O_1 , a BPC háromszög beírt köréé pedig O_2 . Legyen az APC háromszögbe írt körnek az AB oldallal való érintési pontja T_1 , a BPC háromszögbe írt körnek pedig ugyancsak az AB oldallal való érintési pontja T_2 . Így a közös szögfelezők miatt O_1 rajta van az AO , O_2 pedig a BO szakaszon. Mivel a két beírt kör sugara egyenlő, $O_1T_1 = O_2T_2$, tehát $O_1T_1O_2T_2$ téglalap, így O_1O_2 párhuzamos AB -vel. Mivel O_1C és O_2C szögfelezők,

$$\angle O_1CO_2 = \angle O_1CP + \angle PCO_2 = \frac{1}{2}(\angle ACP + \angle PCB) = \frac{1}{2}\angle ACB.$$



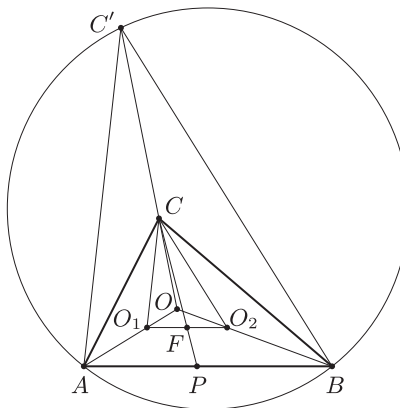
1. ábra

Így, ha $\angle ACB = \gamma$, akkor $\angle O_1CO_2 = \frac{\gamma}{2}$.

A CP felezi az O_1O_2 szakaszt az F pontban, hiszen ha E és G az egyenlő sugarú körök érintési pontjai a CP -n, akkor $O_1EF \cong O_2GF$.

Mivel O_1O_2 párhuzamos AB -vel, az OAB és OO_1O_2 háromszögek hasonlóak. Van közös csúcuk, O és két közös oldalegyenesük, tehát létezik olyan O középpontú nagyítás, amely az OO_1O_2 háromszöget pontosan OAB -be nagyítja.

Vizsgáljuk meg, hova vinné ez a nagyítás C -t. Mivel C -ből $\frac{\gamma}{2}$ szögben látszik O_1O_2 , így olyan pontba kerülne, ahonnan $\frac{\gamma}{2}$ szögben látszik az AB oldal. Azt is tudjuk, hogy rajta maradna a C -n átmenő szögfelezőn, mivel C is és O is rajta van (2. ábra).



2. ábra

Ez a C' pont megszerkeszthető a P , O_1 , O_2 pontok ismerete nélkül is. Tehát megkaphatjuk a nagyítás arányát. Ha megvan az arány, könnyen szerkeszthetjük a P pontot.

A szerkesztés menete: Megszerkesztjük a háromszög szögfelezőit. Az AB szakasz fölé $\frac{\gamma}{2}$ -vel látóörívet szerkesztünk. Az OC félegyenes a látóörívet a C' pontban metszi.

Ezután az O középpontú, $\lambda = \frac{OC}{OC'}$ arányú kicsinyítéssel megkapjuk az O_1 és O_2 pontokat.

Az O_1O_2 szakaszt megfelelően, a felezőpont legyen F . Az OF egyenes kimetszi az AB szakaszból a keresett P pontot.

Diszkusszió: Ha az O_1 pont az O pontból indulva végighalad az OA szakaszon, miközben az O_1O_2 egyenes végig párhuzamos az AB -vel, az $\angle O_1CO_2$ nagysága szigorúan monoton növekszik nullától γ -ig. Így a $\frac{\gamma}{2}$ értéket az O_1O_2 szakasznak csak egyetlen helyzetében veszi fel. Ilyenkor a P pont mindig szerkeszthető, így minden háromszög esetében pontosan egy ilyen pont van.