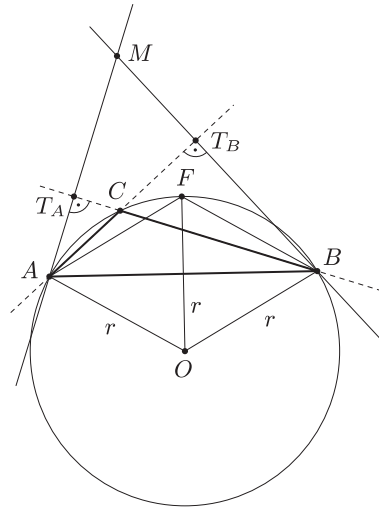


**I. megoldás.** Mivel a háromszög  $C$  csúcsánál lévő szög  $120^\circ$ , a kerületi szögek tétele alapján az  $F$  pontból az  $AB$  szakasz  $120^\circ$ -os szögben látszik. Ennek a szögnek a szögfelezőjén van rajta az  $O$  pont, mivel  $F$  az  $AB$  ív felezőpontja, ezért  $\angle AFO = \angle OFB = 60^\circ$ . Az  $AFO$  és  $OFB$  háromszögek egyenlő szárúak és van  $60^\circ$ -os szögük, ezért szabályosak, tehát  $AF = FB = r$ .

Az  $MT_ACT_B$  négyszög húrnégyszög, mert két szemközti szöge derékszög (1. ábra).



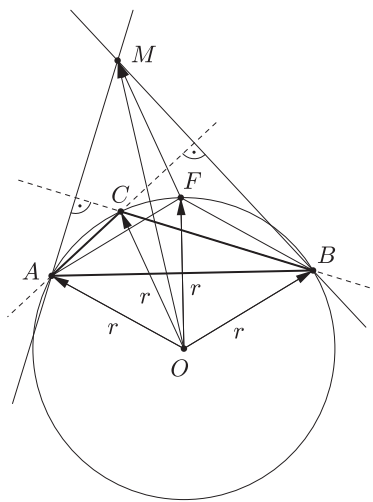
1. ábra

A húrnégyszögek tétele alapján  $\angle AMB + \angle T_ACT_B = 180^\circ$ . Az utóbbi megegyezik  $\angle ACB = 120^\circ$ -kal, mivel csúcsszögek, ezért  $\angle AMB = 60^\circ$ . Ugyanakkor  $\angle AOB = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ , ezért az  $AMBO$  négyszög is húrnégyszög. Az  $AOB$  háromszög körülírt körének középpontja  $F$ , mert  $FA = FO = FB = r$ .

Mivel  $AMBO$  húrnégyszög, az  $M$  pont rajta van az  $AOB$  háromszög körülírt körén, amiből következik, hogy  $MF = FO = r$ , és ezt kellett bizonyítani.

**II. megoldás.** Mivel  $M$  a magasságpont és  $O$  az  $ABC$  háromszög köré írt kör középpontja, tudjuk, hogy  $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ .

Vegyük észre, hogy az  $OAFB$  négyszög rombusz, ugyanis a háromszögben a  $C$  csúcsnál lévő szög  $120^\circ$ , így  $\angle AOB$  is  $120^\circ$ , mert a  $C$  pontból az  $AFB$  ív kiegészítő ívét látjuk  $120^\circ$  alatt, így az a középpontból  $2 \cdot 120^\circ = 240^\circ$  alatt látszik, vagyis  $\angle AOB = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$ , és  $F$ -ből az  $AB$  húr ugyanakkora szög alatt látszik, mint  $C$ -ből. Ebből következik, hogy  $OAF$  és  $OFB$  egyenlő oldalú háromszögek.



2. ábra

Ha az  $OAFB$  négyszög rombusz, akkor paralelogramma is, így  $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OF}$ . A 2. ábráról látható, hogy  $\vec{OM} = \vec{OF} + \vec{FM}$ , így

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OF} + \vec{OC} = \vec{OF} + \vec{FM},$$

amiből következik, hogy  $\vec{OC} = \vec{FM}$ . Mivel  $OF$  hossza egyenlő a kör sugarával, az  $OF$  távolság egyenlő az  $OC$  távolsággal, vagyis  $OF = FM$ .