

Megoldás. Nem létezik. Tegyük föl, hogy f olyan függvény a síkon, amelynek bármely szabályos ötszög csúcsain fölvelt értékeit összeadva mindig nullát kapunk. Megmutatjuk, hogy f értéke a sík tetszőleges P pontjában nulla. Vegyünk fel ehhez a síkon egy olyan szabályos $PA_0B_0C_0D_0$ ötszöget, amelynek egyik csúcsa P . Forgassuk el ezt az ötszöget P körül pozitív irányban 72° , $2 \cdot 72^\circ$, $3 \cdot 72^\circ$, illetve $4 \cdot 72^\circ$ fokkal; az így kapott (az eredetivel egybevágó) szabályos ötszögek csúcsai (az eredetivel egyező körüljárás szerint) P , A_i , B_i , C_i , D_i ($i = 1, 2, 3, 4$ -re). Az f függvényre tett feltevés szerint $f(P) + f(A_i) + f(B_i) + f(C_i) + f(D_i) = 0$ az i mindegyik értékére, így nyilván

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^4 f(P) + f(A_i) + f(B_i) + f(C_i) + f(D_i) = \\ &= 5f(P) + \sum_{i=0}^4 f(A_i) + \sum_{i=0}^4 f(B_i) + \sum_{i=0}^4 f(C_i) + \sum_{i=0}^4 f(D_i). \end{aligned}$$

Azonban például az $A_0A_1A_2A_3A_4$ ötszög is szabályos, hiszen csúcsai egyenlő távolságra vannak P -től, és az A_i csúcsot P körül 72° fokkal elforgatva az A_{i+1} csúcsot kapjuk. Így $\sum_{i=0}^4 f(A_i)$ nulla, és ugyanezért a $\sum_{i=0}^4 f(B_i)$, $\sum_{i=0}^4 f(C_i)$, $\sum_{i=0}^4 f(D_i)$ összegek is eltűnnek. A fentiek szerint ebből $5f(P) = 0$, azaz valóban $f(P) = 0$ következik. A feltételnek tehát csak az azonosan nulla függvény tesz eleget.