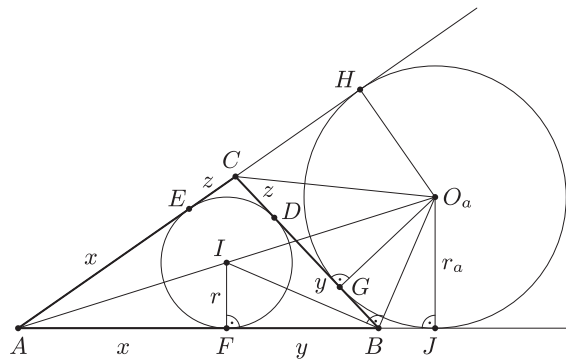


Megoldás. Először határozzuk meg a beírt kör és hozzáírt körök és az oldalegyenesek érintési pontjainak a háromszög csúcsaitól való távolságát. Jelöljük az érintési pontokat a 1. ábrán látható módon D, E, F, G, H, J -vel. Egy külső pontból egy körhöz húzott két érintőszakasz hossza egyenlő, ezért $AH = AJ$, $BG = BJ$ és $CH = CG$, továbbá $AE = AF = x$, $BD = BF = y$ és $CD = CE = z$.



1. ábra

Az $x + y = c$, $y + z = a$ és $z + x = b$ összefüggésekből következik, hogy $2x + 2y + 2z = a + b + c = 2s$, azaz $x + y + z = s$, és így $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$. A hozzáírt körhöz húzott érintőszakaszokra pedig

$$2AH = AH + AJ = (AC + CG) + (AB + BG) = AC + AB + BC = 2s,$$

tehát $AH = AJ = s$, $BG = BJ = s - c$, $CH = CG = s - b$.

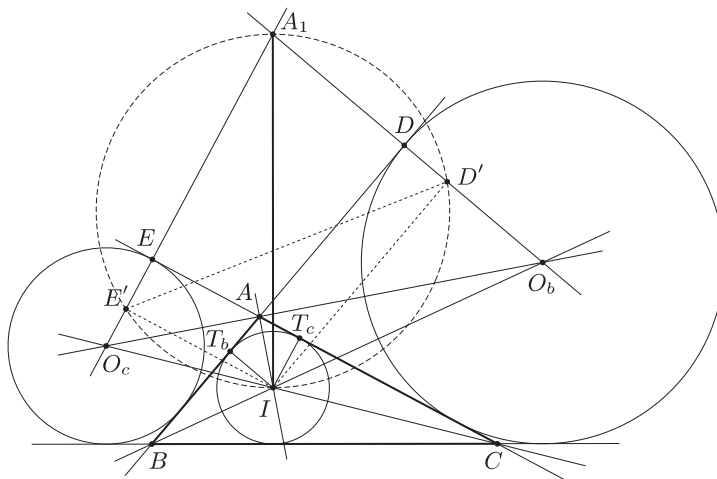
Ezután a 2. ábra jelöléseit használva: E és D a hozzáírt körök és az oldalegyenesek érintési pontjai. T_b és T_c a beírt kör és az oldalak érintési pontjai. Az előzőek alapján:

$AT_b = AT_c = s - a$, $AD = s - c$, $AE = s - b$. Tehát

$$T_b D = s - a + s - c = 2s - a - c = (a + b + c) - a - c = b$$

és

$$T_c E = s - a + s - b = (a + b + c) - a - b = c.$$



2. ábra

Vegyünk fel az $O_b D$ egyenesen egy D' pontot úgy, hogy $DD' = T_b I$ legyen. Tudjuk, hogy $O_b D A$ és $I T_b A$ derékszög. Tehát $DD' I T_b$ téglalap. Így $D' I = D T_b = b$. Hasonlóan vegyünk fel E' -t is az $O_c E$ egyenesen. Itt $E' I = E T_c = c$. Mivel $DD' I T_b$ és $EE' I T_c$ téglalap így $D' I$ és $E' I$ bezárt szöge ugyanakkora, mint $T_b D$ és $T_c E$ szöge, azaz α . Ebből következik, hogy az ABC háromszög és $D' I E'$ háromszög egybevágó, mivel két oldaluk és azok bezárt szöge megegyezik.

Mivel $AEA_1 \angle$ és $ADA_1 \angle$ derékszög és $EAD \angle = \alpha$, azért

$$EA_1 D \angle = 180^\circ - \alpha.$$

Ebből következik, hogy $IE' A_1 D'$ húrnégyszög. A körülírt kör sugara R , mivel az ABC háromszög és a $D' I E'$ háromszög egybevágó. Mivel $ID' A_1$ derékszög, $A_1 I$ a körülírt kör átmérője. Tehát $A_1 I = 2R$, ezzel beláttuk az állítást.