

Számozzuk meg a négyzet sorait fentről lefelé, oszlopait pedig balról jobbra 1-től 23-ig.

Színezzük ki először úgy a négyzetet, hogy a páratlan számú sorok legyenek feketék, és a párosak pedig fehérek. Ekkor 12×23 db fekete és 11×23 db fehér mező van. Minden 3×3 -as négyzet vagy 3 db, vagy 6 db fekete mezőt fed le, és minden 2×2 -es négyzet pontosan 2 db-ot. Emiatt a 3×3 -as négyzetek által lefedett fekete és fehér mezők számának különbsége osztható 3-mal, valamint a 2×2 -es négyzetek által lefedett fekete és fehér mezők számának különbsége is osztható 3-mal. Tudjuk, hogy az összes fekete és fehér mezők számának különbsége 23. Ha az 1×1 -es négyzet fekete mezőn van, akkor a megmaradó fekete és a fehér mezők számának különbsége 22, ami nem osztható 3-mal, tehát a maradékot nem tudjuk lefedni 2×2 -es és 3×3 -as négyzetekkel. Emiatt az 1×1 -es négyzet csak fehér mezőn lehet, vagyis páros sorban.

Most színezzük ki a 23×23 -as táblát úgy, hogy a páratlan számú oszlopok legyenek feketék, a párosak pedig fehérek. Ekkor a fenti gondolatmenethez hasonló módon kapjuk, hogy az 1×1 -es négyzet csak fehér mezőn lehet, vagyis csak páros sorszámú oszlopban.

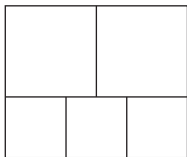
Most úgy színezzük ki a 23×23 -as táblát, hogy azok a sorok, melyeknek sorszáma 3-mal osztható legyenek pirosak, a többi sor pedig legyen kék. Ekkor minden 3×3 -as négyzet 6 db kék mezőt fed le, és minden 2×2 -es négyzet vagy 2 db vagy 4 db kék mezőt fed le. Tehát minden 3×3 -as és 2×2 -es négyzet páros sok kék mezőt fed le. Tudjuk, hogy összesen 16×23 , vagyis páros számú kék mező van. Ha az 1×1 -es négyzet kék mezőn van, akkor páratlan számú kék mező marad, tehát nem tudjuk a maradékot 2×2 -es és 3×3 -as négyzetekkel lefedni. Emiatt az 1×1 -es négyzet csak piros mezőn lehet, 3-mal osztható sorszámú sorban.

Most színezzük ki úgy a 23×23 -as táblát, hogy azok az oszlopok, melyeknek sorszáma 3-mal osztható legyenek pirosak, a többi sor pedig legyen kék. Akkor a fenti gondolatmenethez hasonlóan kapjuk, hogy az 1×1 -es négyzet csak piros mezőn lehet, 3-mal osztható sorszámú oszlopban.

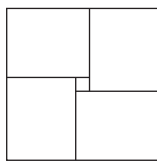
Tehát az 1×1 -es négyzet csak 6-tal osztható sorszámú oszlopban és 6-tal osztható sorszámú sorban lehet, vagyis összesen 9 helyen lehet a táblán.

Most megmutatjuk, hogy ez a 9 lehetőség meg is valósítható.

Először megmutatjuk, hogy ha $k \geq 1$, akkor $(2k+1) \times 6n$ -es téglalapot le lehet fedni 2×2 -es és 3×3 -as négyzetekkel. Egy $3 \times 6n$ -es téglalapot le lehet fedni csak 3×3 -as négyzetekkel. Egy 5×6 -os téglalapot le lehet fedni az 1. ábrán látható módon. Egy $5 \times 6k$ -s téglalapot is le lehet fedni úgy, hogy k db 5×6 -os téglalapra vágjuk, és ezeket már le tudjuk fedni. Egy $(2k+1) \times 6n$ -es téglalapot pedig úgy fedünk le ($2k+1 > 5$), hogy a széléről leválasztunk egy $5 \times 6n$ -es téglalapot. Ezt le tudjuk fedni, és maradt egy $(2k+1-5) \times 6n = (2k-4) \times 6n$ -es téglalap, amit már le tudunk fedni csak 2×2 -es négyzetekkel.



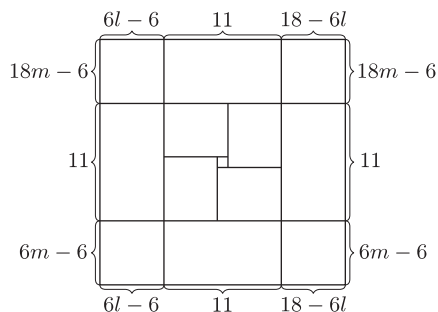
1. ábra



2. ábra

A 2. ábrán látható módon egy db 1×1 -es és 4 db 5×6 -os téglalappal le tudunk fedni egy 11×11 -es négyzetet, és az 1×1 -es négyzet lesz a középpontja. Az i -edik oszlopban, j -edik sorban levő négyzet legyen az (i, j) négyzet. Legyen az 1×1 -es négyzet a $(6l; 6m)$ négyzet, ahol $l \geq 1, m \geq 1$. Ekkor 4 db 5×6 -os téglalappal és az 1×1 -es négyzettel fedjük le ezt a 11×11 -es négyzetet, aminek az 1×1 -es négyzet a középpontja. A 11×11 -es négyzet sarkainak koordinátája: $(6l-5; 6m-5)$, $(6l+5; 6m-5)$, $(6l-5; 6m+5)$, $(6l+5; 6m+5)$. Mivel $l > 0, m > 0$, azért a 11×11 -es négyzet benne van a 23×23 -as négyzetben.

A 11×11 -es négyzet oldalai mentén vágjuk szét a 23×23 -as négyzetet (3. ábra).



Ekkor 8 db téglalapot kapunk: egy $(6l-6) \times (6m-6)$ -os téglalapot, egy $11 \times (6m-6)$ -os téglalapot, egy $(18-6l) \times (6m-6)$ -os téglalapot, egy $(18-6l) \times 11$ -es téglalapot, egy $(18-6l) \times (18-6m)$ -es téglalapot, egy $11 \times (18-6m)$ -es téglalapot, egy $(6l-6) \times (18m-6)$ -es téglalapot, és egy $(6l-6) \times 11$ -es téglalapot. Mivel $6l < 23$ és $6m < 23$, emiatt $l \leq 3$ és $m \leq 3$. Tehát mind a nyolc téglalap oldalai nulla, vagy pozitív számok. Ezek közül négy olyan téglalap, hogy minden oldala páros, tehát ezeket le lehet fedni 2×2 -es négyzetekkel, és 4 közülük $(2k+1) \times 6n$ alakú, amit pedig le tudunk fedni. Tehát így lefedtük a 23×23 -as négyzetet. Beláttuk, hogy az 1×1 -es négyzet a $(6l, 6m)$ koordinátájú pontokban helyezkedhet el.