Megoldás. Ha $a+b=0$, akkor $a=b=0$, és az egyenlőtlenség nyilván fennáll.

Feltehetjük tehát, hogy $a+b>0$.

Ha $a,b>1$ lenne, akkor $a^3>a^2$ és $b^3>b^2$ alapján,

$$a^3+b^3>a^2+b^2\geq 2ab$$

miatt a feltétel nem teljesülne. Tehát a és b közül legalább az egyik nem nagyobb 1-nél.

Szimmetria okok miatt feltehetjük, hogy $b\leq 1$. Ha $a\leq 1$ is fennáll, akkor nyilván $a^3+b^3\leq a+b$. Ezt a pozitív $a+b$ mennyiséggel osztva kapjuk, hogy $a^2-ab+b^2\leq 1$, ami ekvivalens a bizonyítandó egyenlőtlenséggel.

Ha pedig $a>1$, akkor $a^3+b^3=2ab\leq a^2+b^2$. Ezt felhasználva

$$a(a-1)<a^2(a-1)=a^3-a^2\leq b^2-b^3=b^2(1-b)\leq b(1-b),$$

ahonnan $a^2+b^2<a+b$ következik. Tehát ebben az esetben is eljutunk az $a^3+b^3<a+b$ egyenlőtlenségre, ahonnan most $a^2+b^2<1+ab$ adódik.

A fentiekből az is kiderült, hogy egyenlőség pontosan az $a=b=1$ esetben áll fenn.