

**Megoldás.** Ha  $a + b = 0$ , akkor  $a = b = 0$ , és az egyenlőtlenség nyilván fennáll.

Feltehetjük tehát, hogy  $a + b > 0$ .

Ha  $a, b > 1$  lenne, akkor  $a^3 > a^2$  és  $b^3 > b^2$  alapján,

$$a^3 + b^3 > a^2 + b^2 \geq 2ab$$

miatt a feltétel nem teljesülne. Tehát  $a$  és  $b$  közül legalább az egyik nem nagyobb 1-nél.

Szimmetria okok miatt feltehetjük, hogy  $b \leq 1$ . Ha  $a \leq 1$  is fennáll, akkor nyilván  $a^3 + b^3 \leq a + b$ . Ezt a pozitív  $a + b$  mennyiséggel osztva kapjuk, hogy  $a^2 - ab + b^2 \leq 1$ , ami ekvivalens a bizonyítandó egyenlőtlenséggel.

Ha pedig  $a > 1$ , akkor  $a^3 + b^3 = 2ab \leq a^2 + b^2$ . Ezt felhasználva

$$a(a - 1) < a^2(a - 1) = a^3 - a^2 \leq b^2 - b^3 = b^2(1 - b) \leq b(1 - b),$$

ahonnan  $a^2 + b^2 < a + b$  következik. Tehát ebben az esetben is eljutunk az  $a^3 + b^3 < a + b$  egyenlőtlenségre, ahonnan most  $a^2 + b^2 < 1 + ab$  adódik.

A fentiekből az is kiderült, hogy egyenlőség pontosan az  $a = b = 1$  esetben áll fenn.