

Megoldás. Mivel α , β és γ egy háromszög szögei, szinuszaik 1-nél kisebb pozitív számok. Ezekre a pozitív számokra alkalmazva a számtani és a mértani közepek közti egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}.$$

Négyzetre emelve és átrendezve

$$(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2 > 9 \sqrt[3]{(\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma)^2}$$

adódik. Állításunk bizonyításához ezért elég megmutatnunk, hogy ha

$$s = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \quad \text{akkor} \quad \sqrt[3]{s^2} > s.$$

A szögek szinuszaik mind 1-nél kisebbek, ezért szorzatuk is az, vagyis $s < 1$, amiből következik, hogy

$$s^2(1 - s) > 0, \quad \text{azaz} \quad s^2 > s^3,$$

ebből pedig köbgyököt vonva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

Megjegyzés. A feladatban szereplő egyenlőtlenség nem éles. Megmutatjuk, hogy az erősebb

$$(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2 \geq 6\sqrt{3} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

egyenlőtlenség is teljesül, és ez tovább nem javítható, mert szabályos háromszög esetén egyenlőség áll fenn.

A következő, vázlatos bizonyításban szereplő tételek mindegyikének részletes kidolgozása megtalálható pl. *Kiss György: Amit jó tudni a háromszögekről* című cikkében, lapunk 2002. márciusi számának 130–139. oldalain¹. Jelöljük a háromszög oldalait a szokásos módon a , b , c -vel, félkerületét s -sel, területét T -vel, köré írható körének sugarát pedig R -rel. Ekkor az általánosított szinusztétel szerint a bizonyítandó állítás

$$\left(\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \right)^2 \geq 6\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R}.$$

Rendezve, és felhasználva az $abc = 4RT$ összefüggést azt kell belátnunk, hogy $(2s)^2 \geq 12\sqrt{3}T$, ami ekvivalens az $s^4 \geq 27T^2$ egyenlőtlenséggel. Ez utóbbi viszont adódik Héron képletéből és a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenségből:

$$27T^2 = 27s(s-a)(s-b)(s-c) \leq 27s \left(\frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} \right)^3 = 27s \cdot \left(\frac{s}{3} \right)^3 = s^4.$$

¹ A <http://www.komal.hu/cikkek/kissgy/haromszokekrol/amtijotudni.h.shtml> címen a cikk honlapunkon is megtalálható.