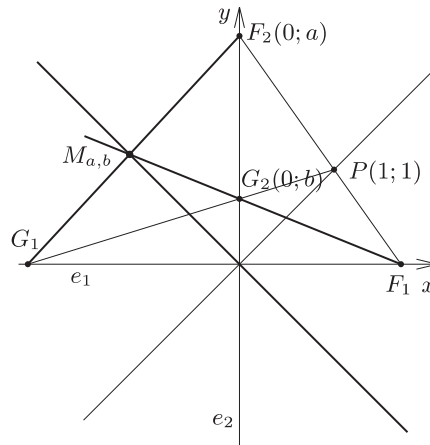


I. megoldás. Vegyünk fel egy derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy annak x tengelye az e_1 , az y tengelye az e_2 egyenes legyen, az egységet pedig válasszuk úgy, hogy a P pont mindkét koordinátája 1 legyen. Ha $F_2 = (0; a)$, ahol $a \neq 1$, akkor az f egyenes egyenlete $Y = (1 - a)X + a$, vagyis az F_1 pont koordinátái $(\frac{a}{a-1}; 0)$. Hasonlóképpen ha $G_2 = (0; b)$, akkor a g egyenes egyenlete $Y = (1 - b)X + b$, a G_1 pont koordinátái pedig $(\frac{b}{b-1}; 0)$, ahol $b \neq 1$. Továbbá $a \neq b$ is teljesül, mert f és g különböző egyenesek.



1. ábra

Ha a és b valamelyike 0, akkor az $F_1G_2 \cap F_2G_1$ metszéspont az origó. Ha $a \neq 0 \neq b$, akkor az F_1G_2 és F_2G_1 egyenesek egyenlete a tengelymetszeteikből egyszerűen felírható.

$$F_1G_2: \frac{X}{\frac{a}{a-1}} + \frac{Y}{b} = 1, \quad \text{azaz} \quad Y = \frac{b(1-a)}{a}X + b,$$

$$F_2G_1: \frac{X}{\frac{b}{b-1}} + \frac{Y}{a} = 1, \quad \text{azaz} \quad Y = \frac{a(1-b)}{b}X + a.$$

Ha $\frac{b(1-a)}{a} = \frac{a(1-b)}{b}$, azaz $a + b = ab$, akkor a két egyenes párhuzamos. Ha $a + b \neq ab$, akkor létezik $M_{a,b} = (x_0; y_0)$ metszéspontjuk, és az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy

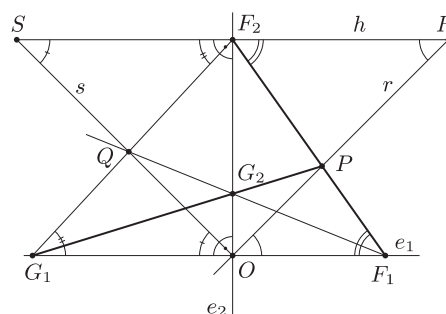
$$x_0 = \frac{ab}{ab - (a + b)} \quad \text{és} \quad y_0 = \frac{-ab}{ab - (a + b)} = -x_0,$$

ami azt jelenti, hogy $M_{a,b}$ mindig rajta van az $Y = -X$ egyenletű egyenesen, ami az e_1 és e_2 egyenesek másik szögfelezője.

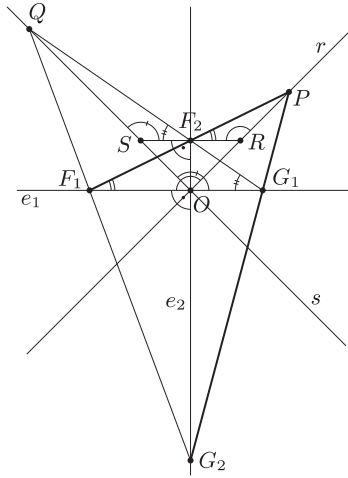
Megmutatjuk, hogy az $Y = -X$ egyenes minden pontja előáll $M_{a,b}$ alakban. Az origóról már láttuk, hogy a mértani helyhez tartozik. Ezért elegendő azt meggondolnunk, hogy a és b megfelelő választásával $\frac{1}{x_0} = 1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ még az $a, b \neq 0, 1, a \neq b$ feltételek mellett is tetszőleges értéket felvehet, ami nyilvánvaló. A keresett mértani hely tehát az e_1 és e_2 egyenesek két szögfelezője közül a P pontot nem tartalmazó teljes szögfelező egyenes.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy a keresett mértani hely az e_1 és e_2 egyenesek másik szögfelezője.

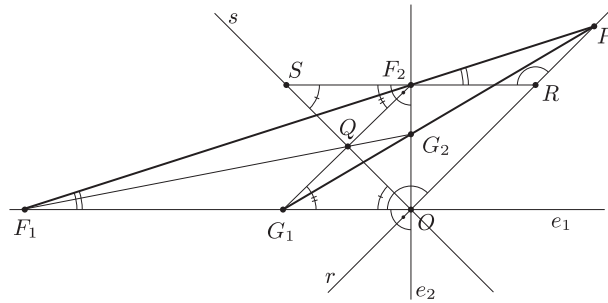
Jelöljük r -rel az e_1 és e_2 egyenesek P pontot tartalmazó szögfelezőjét, s -sel pedig a két egyenes másik szögfelezőjét. Legyen h az F_2 ponton átmenő e_1 -gyel párhuzamos egyenes, továbbá legyen $O = e_1 \cap e_2$, $Q = F_1G_2 \cap F_2G_1$, $R = r \cap h$ és $S = s \cap h$. Az e_1 , e_2 , f és g egyenesek lehetséges helyzetétől függően az O pont az F_1G_1 és F_2G_2 szakaszok közül egyiknek sem (2. ábra), pontosan egyiknek (3. ábra), vagy mindkettőnek (4. ábra) belső pontja. Következő állításaink mindhárom esetben érvényesek.



2. ábra



3. ábra



4. ábra

Mivel h és e_1 párhuzamosak, a POF_1 és a PRF_2 háromszögek, valamint a QOG_1 és a QSF_2 háromszögek is hasonlóak, mert megfelelő szögek megegyeznek. Tehát a háromszögek megfelelő oldalainak aránya is egyenlő, azaz

$$(1) \quad \frac{F_1O}{PF_1} = \frac{F_2R}{F_2P} \quad \text{és} \quad \frac{G_1Q}{OG_1} = \frac{QF_2}{F_2S}.$$

Alkalmazzuk az $F_1G_1F_2$ háromszögre és a G_2 pontra Ceva tételének általánosítását. Mivel az F_1Q , G_1P és F_2O egyenesek mindegyike átmegy G_2 -n, ezért

$$\frac{F_1O}{OG_1} \cdot \frac{G_1Q}{QF_2} \cdot \frac{F_2P}{PF_1} = 1, \quad \text{azaz} \quad \frac{F_1O}{PF_1} \cdot \frac{G_1Q}{OG_1} \cdot \frac{F_2P}{QF_2} = 1,$$

amiből felhasználva az (1) egyenlőségeket, kapjuk, hogy $F_2R = F_2S$. Ez viszont azt jelenti, hogy az OF_2R és OF_2S háromszögek egybevágóak, mert megegyezik két-két oldaluk és az azok által bezárt szög (hiszen a h egyenes definíciója miatt $OF_2R \angle = OF_2S \angle = 90^\circ$.) Vagyis $F_2OQ \angle = F_2OP \angle = 45^\circ$, tehát Q rajta van az s egyenesen.

Megmutatjuk, hogy az s egyenes tetszőleges T pontja előáll $F_1G_2 \cap F_2G_1$ alakban megfelelően választott f^T és g^T egyenesek esetén. Először legyen f^T egy rögzített, P -n átmenő, e_i -t F_i -ben metsző egyenes, $G_1^T = F_2T \cap e_1$ és $G_2^T = PG_1^T \cap e_2$. Ekkor a P -n átmenő $G_1^TG_2^T$ egyenest választva g^T -nek, az $F_1G_2 \cap F_2G_1$ pont éppen T lesz. Ez az előállítás nem működik, ha TF_2 és e_1 párhuzamosak, valamint akkor sem, ha $T = f \cap s$. Ezt a két pontot úgy tudjuk előállítani $F_1G_2 \cap F_2G_1$ alakban, ha megváltoztatjuk az elsőnek felvett f^T egyenest. Ezzel elérhetjük, hogy az új egyeneshez tartozó két „rossz” pont különbözzön az első egyeneshez tartozó rossz pontoktól.