

Megoldás. Az állítást az n szerinti teljes indukcióval igazoljuk; $n = 0$ -ra az üres szorzatot 1-nek tekintve a két oldal között egyenlőség áll fenn.

Ezután tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség teljesül $n = k$ -ra, vagyis

$$(1) \quad 1 + \frac{1}{a_0} \left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_k - a_0} \right) \leq \\ \leq \left(1 + \frac{1}{a_0} \right) \left(1 + \frac{1}{a_1} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_k} \right).$$

Az $n = k + 1$ esetben azt kellene belátnunk, hogy

$$(2) \quad 1 + \frac{1}{a_0} \left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_k - a_0} \right) \left(1 + \frac{1}{a_{k+1} - a_0} \right) \leq \\ \leq \left(1 + \frac{1}{a_0} \right) \left(1 + \frac{1}{a_1} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_k} \right) \left(1 + \frac{1}{a_{k+1}} \right).$$

Ehhez – az (1)-est is figyelembe véve – elegendő azt igazolni, hogy

$$(3) \quad \frac{1}{a_0} \left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_k - a_0} \right) \frac{1}{a_{k+1} - a_0} \leq \\ \leq \left(1 + \frac{1}{a_0} \right) \left(1 + \frac{1}{a_1} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_k} \right) \frac{1}{a_{k+1}},$$

hiszen az (1)-es és (3)-as feltételek megfelelő oldalainak összegzésével kaphatjuk meg a (2)-es sort.

A (3) bizonyításához is teljes indukciót alkalmazunk. Ekkor $k = 0$ esetén azt kell igazolnunk, hogy

$$\frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{a_1 - a_0} \leq \left(1 + \frac{1}{a_0} \right) \frac{1}{a_1}.$$

Az $a_0 \cdot a_1(a_1 - a_0) > 0$ mennyiséggel beszorozva az alábbi ekvivalens egyenlőtlenséget kapjuk:

$$a_1 \leq (a_0 + 1)(a_1 - a_0), \\ a_0 \leq a_0 \cdot a_1 - a_0^2,$$

illetve az $a_0 > 0$ -val osztva:

$$1 \leq a_1 - a_0.$$

Ez a követelmény pedig a feladat feltétele alapján már teljesül. Ezután tegyük fel, hogy az állítás $k = \ell$ esetén teljesül, vagyis:

$$(4) \quad \frac{1}{a_0} \left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_\ell - a_0} \right) \frac{1}{a_{\ell+1} - a_0} \leq \\ \leq \left(1 + \frac{1}{a_0} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_\ell} \right) \frac{1}{a_{\ell+1}}.$$

Ebből $k = \ell + 1$ esetén azt kellene belátnunk, hogy

$$(5) \quad \frac{1}{a_0} \left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_\ell - a_0} \right) \left(1 + \frac{1}{a_{\ell+1} - a_0} \right) \frac{1}{a_{\ell+2} - a_0} \leq \\ \leq \left(1 + \frac{1}{a_0} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_\ell} \right) \left(1 + \frac{1}{a_{\ell+1}} \right) \frac{1}{a_{\ell+2}}.$$

Ehhez – a (4)-est is figyelembe véve – elegendő belátni, hogy

$$(6) \quad \left(1 + \frac{1}{a_{\ell+1} - a_0} \right) \frac{a_{\ell+1} - a_0}{a_{\ell+2} - a_0} \leq \left(1 + \frac{1}{a_{\ell+1}} \right) \frac{a_{\ell+1}}{a_{\ell+2}},$$

hiszen a (4)-es és (6)-os egyenlőtlenségek megfelelő oldalainak összeszorozásával adódik az (5)-ös.

Beszorozva a pozitív $(a_{\ell+2} - a_0) \cdot a_{\ell+2}$ mennyiséggel, ekvivalens átalakítások során:

$$(a_{\ell+1} - a_0 + 1)a_{\ell+2} \leq (a_{\ell+1} + 1)(a_{\ell+2} - a_0), \\ a_0 \leq a_0 \cdot a_{\ell+2} - a_0 \cdot a_{\ell+1},$$

végül $a_0 > 0$ -val osztva: $1 \leq a_{\ell+2} - a_{\ell+1}$.

Ez a követelmény a feladat feltétele alapján teljesül. Ezzel az állítást igazoltuk. Az egyenlőség feltétele a levezetés alapján $a_{k+1} - a_k = 1$ feltétel teljesülése minden $k = 0, 1, \dots, n - 1$ esetén.