

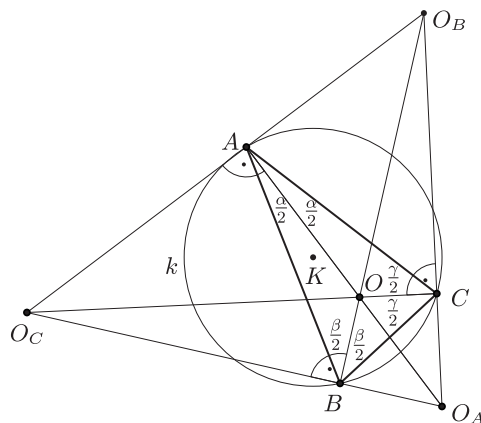
Megoldás. Jelölje a szerkesztendő háromszög csúcsait és szögeit a szokásos módon A, B, C , illetve α, β, γ , a körülírt kör legyen k , középpontja K , a beírt kör középpontja O , a hozzáírt körök középpontjai pedig O_A, O_B és O_C . Először megmutatjuk, hogy $O_A O_B O_C$ olyan hegyesszögű háromszög, amelynek talpponti háromszöge ABC , Feuerbach-köre pedig k (1. ábra, ezeket az állításokat a **B. 4428.** feladat megoldása¹ során is beláttuk).

Tudjuk, hogy a beírt kör középpontja a három belső, a hozzáírt körök középpontjai pedig két külső és egy belső szögfelező metszéspontjai. A háromszög bármely csúcsához tartozó külső és belső szögfelezők merőlegesek egymásra, ezért $AO_A \perp O_B O_C$, $BO_B \perp O_A O_C$ és $CO_C \perp O_B O_A$. Tehát az AO_A, BO_B és CO_C szakaszok az $O_A O_B O_C$ háromszög magasságszakaszai, azaz az A, B és C pontok e háromszög magasságvonalainak talppontjai, vagyis a rajtuk átmenő kör (ami egyúttal az ABC háromszög körülírt köre) az $O_A O_B O_C$ háromszög Feuerbach-köre. A hozzáírt körök középpontjainak szimmetrikus szerepe miatt az $O_A O_B O_C$ háromszög hegyesszögű voltának belátásához elegendő megmutatnunk, hogy $O_B O_C O_A < 90^\circ$. Mivel

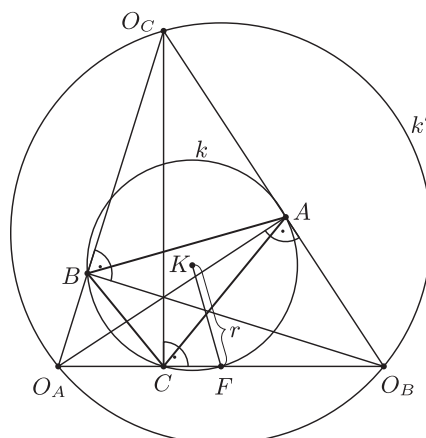
$$ABO_C < O_B B O_C < O_B B A < 90^\circ - O_B A < 90^\circ - \frac{\beta}{2},$$

és ugyanígy kapjuk, hogy $BAO_C < 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, azért

$$\begin{aligned} O_B O_C O_A < AO_C B < 180^\circ - (ABO_C + BAO_C) = \\ = 180^\circ - \left(\left(90^\circ - \frac{\beta}{2} \right) + \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \right) = \frac{\alpha + \beta}{2} < \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 90^\circ. \end{aligned}$$



1. ábra



2. ábra

Ezek után felhasználva, hogy bármely háromszög Feuerbach-körének sugara éppen fele a háromszög köré írható kör sugarának, a szerkesztés már egyszerűen elvégezhető. Feltehetjük, hogy a hozzáírt körök középpontjai közül O_A és O_B adott.

Először megszerkesztjük az $O_A O_B$ szakasz F felezőpontját, majd a K középpontú $KF = r$ sugarú kört, ami megegyezik k -val. Ezek után megszerkesztjük az $O_A O_B O_C$ háromszög köré írható k' kört, tudván hogy ez áthalad az O_A és O_B pontokon, sugara pedig kétszerese a k kör sugarának (vagyis k' középpontja az O_A , illetve O_B középpontú $2r$ sugarú körök metszéspontja, sugara pedig $2r$). A szerkesztendő háromszög C csúcsa a k kör és az $O_A O_B$ szakasz

¹KöMaL, 2013/2., 94. o.

F -től különböző metszéspontjaként adódik (vagy egybeesik F -fel, ha k érinti a szakaszt). A C -ben az $O_A O_B$ egyenesre állított, a K -t tartalmazó félsíkba mutató merőleges félegyenes és k' metszéspontjaként megkapjuk az O_C pontot. Végül az O_A -ból $O_B O_C$ -re, illetve O_B -ből $O_A O_C$ -re állított merőlegesek talppontjai adják az A , illetve B pontokat (2. ábra).

Az így szerkesztett ABC háromszög megfelel a feltételeknek, mert nyilván az $O_A O_B O_C$ háromszög talpponti háromszöge, azaz hozzáírt köreinek középpontjai rendre O_A , O_B és O_C , körülírt köre pedig a K középpontú k kör.

A feladatnak legfeljebb egy megoldása van. Akkor kapunk megoldást, ha a szerkesztés minden lépését el tudjuk végezni, azaz ha a következő feltételek teljesülnek:

- A K pont nem esik az $O_A O_B$ egyenesre, mert az $O_A O_B O_C$ háromszög belső pontja kell, hogy legyen.
- A K pontnak az $O_A O_B$ szakaszra eső merőleges vetülete közelebb van az F ponthoz, mint az O_A és O_B pontok bármelyikéhez, ez ugyanis annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a k körnek az $O_A O_B$ egyenessel alkotott második metszéspontja (vagy érintési pontja) az $O_A O_B$ szakasz belsejébe essen.
- A KF szakasz kétszerese hosszabb az $O_A O_B$ szakasz felénél. Ez a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az $O_A O_B O_C$ háromszög hegyesszögű legyen.