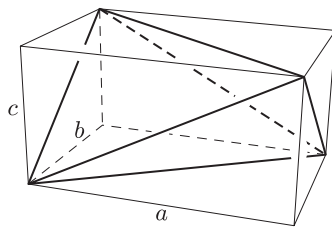


**Megoldás.** Megmutatjuk, hogy a feltételből nem következik a tetraéder szabályossága. Egy konkrét ellenpélda helyett azt látjuk be, hogy a feladatban szereplő egyenlőtlenség minden *egyenlő oldalú tetraéderre* teljesül. Egy tetraédert egyenlő oldalúnak nevezünk, ha lapjai egybevágó háromszögek. Ilyen tetraédert alkot bármely téglatest két szemközi lapján lévő két nem párhuzamos lapátlójának négy végpontja (1. ábra). (Az egyenlő oldalú tetraéderekről részletes leírás található Reiman I.: *Fejezetek az elemi geometriából* című középiskolai tankönyvében. Ott megtalálható annak bizonyítása is, hogy minden egyenlő oldalú tetraéder valamely téglatestből származik az előzőekben leírt módon.)



1. ábra

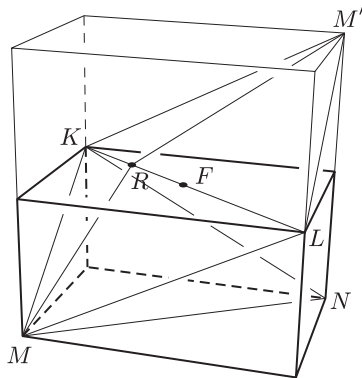
Ha a téglatest egy csúcsában találkozó éleinek hossza  $a$ ,  $b$  és  $c$ , akkor a tetraéder minden lapja olyan háromszög, melynek oldalai Pitagorasz tétele szerint  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\sqrt{b^2 + c^2}$  és  $\sqrt{a^2 + c^2}$ . Ebből azonnal adódik, hogy a tetraéder pontosan akkor szabályos, ha a téglatest kocka.

Először belátunk egy téglatestekre vonatkozó egyenlőtlenséget.

**Segéd-tétel.** Legyen  $KL$  és  $MN$  valamely  $\mathcal{T}$  téglatest két szemközi lapján lévő két nem párhuzamos lapátlója. Ekkor a  $KL$  szakasz tetszőleges  $R$  belső pontja esetén fennáll az

$$RM + RN < KM + KN$$

egyenlőtlenség.



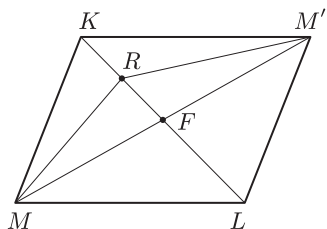
2. ábra

**Bizonyítás.** Tükrözzük  $\mathcal{T}$ -t a  $KL$  átló  $F$  felezőpontjára (2. ábra). Az  $M$  pont tükörképét jelölje  $M'$ . Mivel  $K$  tükörképe  $L$ , azért  $KM$  és  $LM'$  párhuzamosak és egyenlők. Tehát a  $KMLM'$  négyszög parallelogramma. Ezért  $KM' = ML = KN$  és  $LM' = KM = LN$ , vagyis a  $KLM'$  és  $KLN$  háromszögek egybevágóak. Ez azt jelenti, hogy  $RM' = RN$ , ezért elegendő belátnunk az

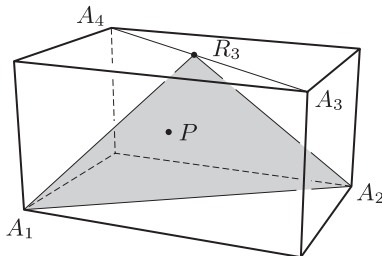
$$(1) \quad RM + RM' < KM + KN = KM + KM'$$

egyenlőtlenséget.

A szimmetria miatt feltehetjük, hogy a  $KMLM'$  parallelogrammában  $R$  a  $KMM'$  háromszög pontja. Ha az  $R$  pont egybeesik  $F$ -fel, akkor (1) a háromszög-egyenlőtlenség miatt teljesül. Ha pedig  $R$  a  $KMM'$  háromszög belső pontja (3. ábra), akkor a **B. 4325.** feladat a) részének eredményét alkalmazva erre a háromszögre kapjuk (1)-et.



3. ábra



4. ábra

Térjünk vissza az eredeti feladatra. Legyen az  $A_1A_2A_3A_4$  egyenlő oldalú tetraéder éleinek hosszai  $A_1A_2 = A_3A_4 = e$ ,  $A_1A_3 = A_2A_4 = f$  és  $A_1A_4 = A_2A_3 = g$ . A tetraéder tetszőleges  $P$  belső pontjára az 1, 2, 3 számok bármely  $i, j, k$  sorrendje esetén legyen az  $A_iA_jP$  sík és az  $A_4A_k$  él dőfspontja  $R_k$ .

Mivel  $P$  az  $A_iA_jR_k$  háromszög belső pontja (4. ábra), ismét a **B. 4325.** feladat *a*) részének értelmében  $PA_i + PA_j < R_kA_i + R_kA_j$ . Viszont segédteételünk szerint  $R_kA_i + R_kA_j < A_4A_i + A_4A_j$ , tehát

$$PA_i + PA_j < A_4A_i + A_4A_j.$$

Ezt az egyenlőtlenséget mindhárom  $i, j$  pár esetén felírva, majd összeadva az egyenlőtlenségeket, kapjuk, hogy

$$2(PA_1 + PA_2 + PA_3) < 2(A_4A_1 + A_4A_2 + A_4A_3) = 2(e + f + g).$$

Vagyis

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 < e + f + g,$$

amiből szimmetria okokból már látszik, hogy a tetraéderre teljesül a feladat szövegében megfogalmazott feltételrendszer.

*Megjegyzés.* A feladatban szereplő egyenlőtlenség más tetraéderekben is fennáll. A megoldók többsége egy-egy konkrét tetraéderben mutatta meg, hosszadalmas számolással, hogy teljesül az egyenlőtlenség. Legtöbben olyan szabályos háromszög alapú egyenes gúla esetét számolták ki, melyek oldalélének hossza nem sokkal tér el az alapélétől.