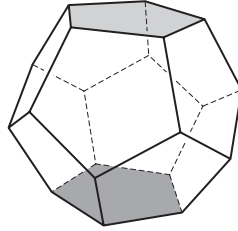


I. megoldás. Tegyük fel, hogy létezik megfelelő számozás. Jelölje S az egyes lapok szomszédaira írt számok összegét. Tekintsük ezt a 12 darab öttagú összeget. Minden lapnak pontosan öt szomszédja van, ezért minden egyes lapra felírt szám a 12 szóban forgó összeg közül pontosan ötben szerepel összeadandóként. Ezért $12 \cdot S$ megegyezik a dobódodekaéder lapjaira írt számok összegének ötszörösével.



A lapokra írt számok összege $1 + 2 + \dots + 12 = 78$, tehát fennáll a $12 \cdot S = 5 \cdot 78$ egyenlőség. Ebből viszont azt kapjuk, hogy $S = 65/2$, ami nem egész szám, tehát nem lehet öt darab egész szám összege. Ez az ellentmondás azt jelenti, hogy nem létezik a dodekaéder lapjainak a feltételeknek eleget tevő számozása.

II. megoldás. Ismét indirekt bizonyítunk. A dodekaéder minden oldalának van egy szemközti párja. Bármely lap esetén a lap, az öt szomszédja, a szemközti lap és annak az öt szomszédja együtt kiadja a dodekaéder 12 lapját. Ezért ha a dodekaéderre írt számok összegéből, 78-ból levonjuk a feltételek szerint bármely lap szomszédaira írt számok S -sel jelölt összegének kétszeresét, akkor megkapjuk a két szemközti lapra írt szám összegét. Vagyis a jól kitöltött dobódodekaéderre (ugyanúgy, mint a jó dobókockára) teljesül, hogy bármely két szemközti lapjára írt számok összege megegyezik.

Mivel hat szemközti lappár van, ez az összeg $78/6 = 13$. Ez viszont azt jelenti, hogy bármely szemközti lappár esetén az öt-öt szomszédjukra írt számok összege $78 - 13 = 65$, ami páratlan. Ezért a két szemközti lap szomszédaira írt számok összege nem egyezhet meg. Vagyis nem létezik a dobódodekaédernek jó számozása.