

Megoldás. Az a , b , c számok (módosított) kanonikus alakja:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}, \quad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}, \quad c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_r^{\gamma_r}.$$

A módosított kanonikus alakon azt értjük, hogy mindhárom szám ugyanazokat a prímekeket tartalmazza úgy, hogy amelyik ténylegesen nem szerepelne a felbontásban, azt 0 kitevővel vesszük be a szorzatba. Ezzel elérjük, hogy a számok egységesen kezelhetők. Jelöljük a p_i prímmel tartozó kitevők közül a legkisebbet $\min(i)$ -vel, a középsőt $\text{med}(i)$ -vel, a legnagyobbat pedig $\max(i)$ -vel. Világos, hogy $\min(i) \leq \text{med}(i) \leq \max(i)$. Ismert, hogy a legnagyobb közös osztóban mindegyik prím az előforduló legkisebb kitevőn, míg a legkisebb közös többszörösben az előforduló legnagyobb kitevőn szerepel. (Természetesen ebben az egységes jelölésben.)

A páronkénti legnagyobb közös osztó meghatározásakor tetszőleges p_i prím esetében megmarad a legkisebb kitevő kétszer és a középső egyszer. Ha ennek a háromnak vesszük a maximumát, akkor éppen $\text{med}(i)$ -t kapjuk.

Vegyük most páronként a legkisebb közös többszörös kitevőit a p_i prím esetében. Itt a legnagyobb marad meg kétszer és a középső egyszer. Ha vesszük a három pár legnagyobb közös osztóját, akkor ott e három közül a legkisebbet kell vennünk, vagyis a középsőt $\text{med}(i)$ -t. Az elmondottak tetszőleges p_i hatványaira igazak, vagyis

$$[(a, b), (b, c), (c, a)] = ([a, b], [b, c], [c, a])$$

valóban teljesül.