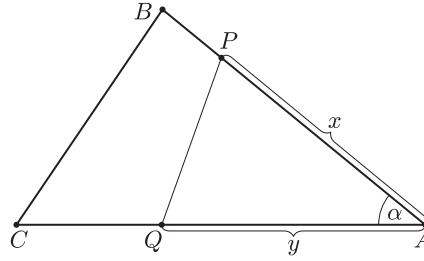
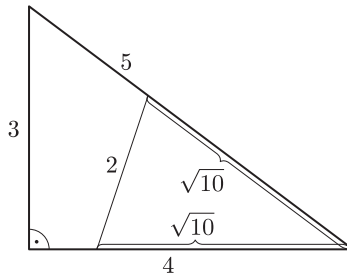


Megoldás. Először általában adunk alsó becslést egy háromszög területét felező szakasz hosszára. Ha a PQ szakasz felezi az ABC háromszög területét, akkor az eredeti háromszög két része közül legalább az egyik egy háromszög (akkor lesz mindkét rész háromszög, ha a PQ szakasz tartalmazza az ABC háromszög valamelyik csúcsát). Mivel alsó becslést adunk, feltehetjük, hogy P és Q az ABC háromszög két oldalára esik, az oldalak szimmetrikus szerepe miatt pedig azt is, hogy P az AB , Q pedig az AC szakasz A -tól különböző pontja. Legyen $AP = x$ és $AQ = y$ (1. ábra).



1. ábra



2. ábra

Ha az ABC háromszög területét T , az A csúcsánál lévő szöget pedig α jelöli, akkor az APQ háromszög területe

$$\frac{T}{2} = \frac{AP \cdot AQ \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{xy \sin \alpha}{2}.$$

Az ebből adódó $xy = \frac{T}{\sin \alpha}$ összefüggést, valamint a koszinusztételt és a négyzetes és a mértani közepek közti egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$(1) \quad PQ^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha \geq 2xy(1 - \cos \alpha) = 2T \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Mivel $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ és $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$, azért

$$PQ^2 \geq 2T \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2T \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x = y = \sqrt{AB \cdot \frac{AC}{2}}$.

Térjünk vissza az eredeti feladatunkra. Hegyesszögek esetén a tangens függvény szigorúan monoton nő, ezért a legrövidebb területfelező szakaszt akkor kapjuk, ha a 3, 4 és 5 oldalakkal rendelkező háromszög legkisebb szögét közrefogó két oldalon, azaz a 4 és 5 hosszú oldalakon vesszük fel a P és Q pontokat úgy, hogy $AP = AQ = \sqrt{5 \cdot \frac{4}{2}} = \sqrt{10}$ teljesüljön. Ez $\sqrt{10} < 4$ miatt megtehető (2. ábra). Ekkor $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, ezért az (1) egyenlőségből kapjuk, hogy

$$PQ^2 = 10 + 10 - 20 \cdot \frac{4}{5} = 4.$$

Tehát a háromszög területét felező szakaszok közül a legrövidebbnek a hossza 2.