

Megoldás. A síkok elhelyezkedése szerint három eset lehetséges:

I. A három sík mindegyike T ugyanazon lapjával párhuzamos. Ekkor négy téglatest keletkezik, vagyis ez nyilván nem lehetséges.

II. A három sík közül kettő T ugyanazon lapjával, a harmadik sík pedig T egy másik lapjával párhuzamos. Ekkor hat téglatest keletkezik, vagyis ez az eset sem lehetséges.

III. A három sík közül mindegyik T másik lapjával párhuzamos. Ekkor valóban nyolc téglatest keletkezik, tehát csak ez az eset lehetséges.

Jelöljük T egy csúcsát A -val, és legyenek T élei a , b és c hosszúak. A három sík elhelyezkedését a téglatesthez képest három ismeretlennel jellemezhetjük. A síkok közül az egyik merőleges T a hosszú éleire, vagyis ha x -szel jelöljük a téglatest A csúcsának és a síknak a távolságát, akkor ez egyértelműen meghatározza a síkot. Ugyanígy jelöljük rendre a másik két (T -nek a b , illetve c hosszú éleit metsző) sík távolságát az A csúctól y -nal, illetve z -vel.

A kis téglatestek színezésénél nyilván mindegy, hogy az A csúcsnál található téglatestet milyen színűre színezzük, így legyen ez a téglatest fekete. Ennek a téglatestnek az oldalai x , y és z hosszúak, vagyis térfogata xyz . Az összes kis téglatest éleit és színét ismerjük, vagyis felírhatjuk térfogatukat. Így a fekete részek térfogatának összege: $xyz + x(b-y)(c-z) + (a-x)y(c-z) + (a-x)(b-y)z$, és a fehér téglatestek össztérfogata: $(a-x)(b-y)(c-z) + (a-x)yz + x(b-y)z + xy(c-z)$; mivel a fekete téglák térfogatának összege egyenlő a fehér téglák térfogatának összegével, a két térfogatösszeg különbsége 0, azaz:

$$\begin{aligned} & (xyz + x(b-y)(c-z) + (a-x)y(c-z) + (a-x)(b-y)z) - \\ & - ((a-x)(b-y)(c-z) + (a-x)yz + x(b-y)z + xy(c-z)) = 0, \\ & (bcx + acy - 2cxy + abz - 2bxz - 2ayz + 4xyz) - \\ & - (abc - bcx - acy + 2cxy - abz + 2bxz + 2ayz - 4xyz) = 0, \\ & - abc + 2abz + 2acy - 4ayz + 2bcx - 4bxz - 4cxy + 8xyz = 0, \\ & abc - 2abz - 2acy + 4ayz - 2bcx + 4bxz + 4cxy - 8xyz = 0, \\ & a(bc - 2bz - 2cy + 4yz) - 2x(bc - 2bz - 2cy + 4yz) = 0, \\ & (a - 2x)(bc - 2bz - 2cy + 4yz) = 0, \\ & (a - 2x)(b - 2y)(c - 2z) = 0. \end{aligned}$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha $x = \frac{a}{2}$, vagy $y = \frac{b}{2}$, vagy $z = \frac{c}{2}$, tehát a síkok közül legalább az egyik felezi T -t.