

Megoldás. Megmutatjuk, hogy L is és M is rajta van az AFB körön. Ehhez elegendő belátnunk, hogy

$$(1) \quad ALB \sphericalangle = AMB \sphericalangle = 180^\circ - AFB \sphericalangle.$$

Jelöljük az $ABCD$ négyzet oldalának hosszát a -val.

Az elforgatások miatt az ADE és CBG háromszögek olyan egybevágó egyenlőszárú háromszögek, amelyek szárainak hossza a , szárszögük α , s így alapon fekvő szögeik nagysága $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Ezért az AFB háromszög A -nál és B -nél lévő külső szögeinek összege

$$(90^\circ + \alpha) + \left(90^\circ + 90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 270^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

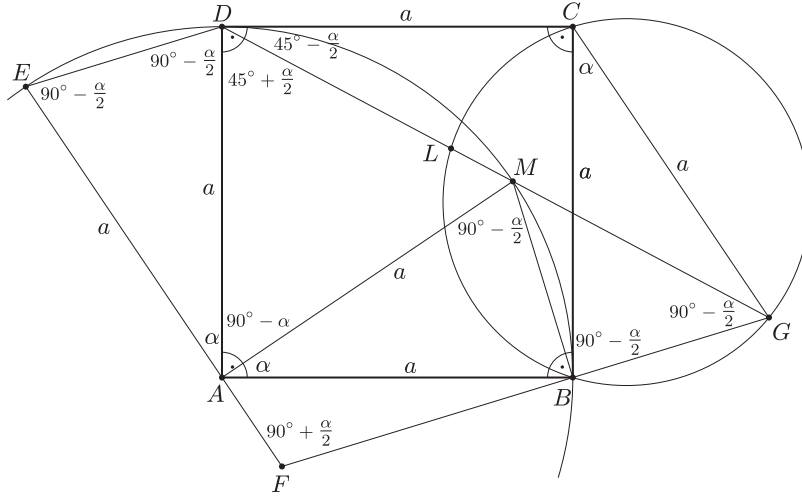
Tudjuk, hogy egy háromszög bármely külső szöge megegyezik a nem mellette lévő két belső szög összegével, ezért – felhasználva, hogy a háromszögben a szögek összege 180° – kapjuk, hogy

$$AFB \sphericalangle = \left(270^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) - 180^\circ = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Mivel $DC = CB = CG = a$ és $DCG \sphericalangle = 90^\circ + \alpha$, a DCG egyenlőszárú háromszögben $CDG \sphericalangle = CGD \sphericalangle = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Ebből kapjuk, hogy

$$ADM \sphericalangle = ADC \sphericalangle - CDG \sphericalangle = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Mivel $AE = AD = AB = a$, azért a BDE kör középpontja A , és így $AM = AD = a$ is teljesül (1. ábra).

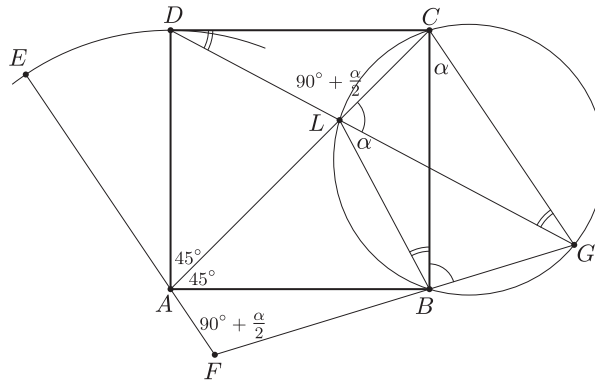


1. ábra

Az ADM és AMB háromszögek tehát egyenlőszárúak, ezért $DAM \sphericalangle = 180^\circ - 2ADM \sphericalangle = 90^\circ - \alpha$, s mivel $MAB \sphericalangle = 90^\circ - DAM \sphericalangle = \alpha$, azért

$$AMB \sphericalangle = \frac{180^\circ - MAB \sphericalangle}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - AFB \sphericalangle.$$

Tehát M rajta van az AFB körön.



2. ábra

Mivel α hegyesszög, a G és L pontok a BC egyenes különböző oldalaira esnek (2. ábra). Így a GC húrhoz tartozó kerületi szögek egyenlősége miatt $CLG \sphericalangle = CBG \sphericalangle = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, amiből kapjuk, hogy $CLD \sphericalangle = 180^\circ - CLG \sphericalangle = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. A GB húrhoz tartozó kerületi szögek egyenlősége miatt pedig $GLB \sphericalangle = GCB \sphericalangle = \alpha$, ezért

$$CLB \sphericalangle = CLG \sphericalangle + GLB \sphericalangle = \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + \alpha = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = CLD \sphericalangle.$$

Végül pedig a CL húrhoz tartozó kerületi szögek egyenlősége miatt $LBC\lrcorner = LGC\lrcorner = DGC\lrcorner = GDC\lrcorner = LDC\lrcorner$. Tehát az LBC és LDC háromszögek egybevágóak, mert közös az LC oldaluk és két-két megfelelő szögük egyenlő. Ezért $LCB\lrcorner = LCD\lrcorner$, vagyis L rajta van az $ABCD$ négyzet AC átlóján. Ezért

$$ALB\lrcorner = 180^\circ - CLB\lrcorner = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - AFB\lrcorner,$$

vagyis teljesül rá az (1) egyenlőség.

Ezzel megmutattuk, hogy mind az öt pont egy körön van.