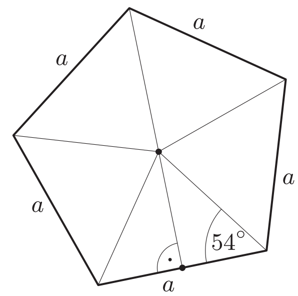
Megoldás. Ha a b oldalú ötszöget teljesen körbeforgatjuk az átlója körül, akkor a keletkező forgástest olyan, mintha a három oldalból és egy átlóból álló trapézt forgatnánk.



A forgástestek térfogata egyenlő a forgatott sokszög területének és a súlypont által bejárt ívhossznak a szorzatával (Papposz–Guldin-tétel): $V = T \cdot R_S \cdot \alpha$, $\alpha = 2\pi$, mert teljesen körbeforgatjuk. R_S a súlypont távolsága a tengelytől.

Az a oldalú szabályos ötszög területe, háromszögekre bontással:

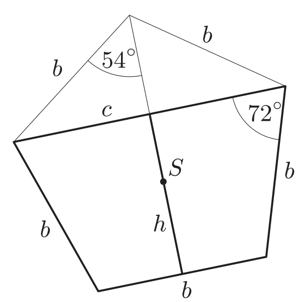
$$T_a = \frac{5a^2 \operatorname{tg} 54^\circ}{4}.$$

Súlypontjának távolsága a forgástengelytől, ami itt az egyik oldal: $R_{Sa} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} 54^\circ$. Így az a oldalú szabályos ötszög oldala körüli megforgatásakor kapott test térfogata:

$$V_a = T_a R_{Sa} 2\pi = \frac{5a^2 \operatorname{tg} 54^\circ}{4} \cdot \frac{a}{2} \operatorname{tg} 54^\circ \cdot 2\pi.$$

A b oldalú szabályos ötszög átlója, egyben a kapott trapéz alapja: $c = 2b \sin 54^\circ$, a trapéz magassága, $h = b \sin 72^\circ$, területe pedig

$$T_b = \frac{b + c}{2} \cdot h = \frac{b + 2b \sin 54^\circ}{2} \cdot b \sin 72^\circ.$$



A b, c alapú, h magasságú trapéz súlypontja a hosszabbik (c) alaptól $R_{Sb} = \frac{h}{3} \cdot \frac{2b + c}{b + c}$ távolságra van. Ebbe beírva az előbb megkapott értékeket:

$$R_{Sb} = \frac{b \sin 72^\circ}{3} \cdot \frac{2b + 2b \sin 54^\circ}{b + 2b \sin 54^\circ}.$$

Így a b oldalú szabályos ötszög átlója körüli megforgatásakor kapott test térfogata:

$$V_b = T_b R_{Sb} 2\pi = \frac{b + 2b \sin 54^\circ}{2} \cdot b \sin 72^\circ \cdot \frac{b \sin 72^\circ}{3} \cdot \frac{2b + 2b \sin 54^\circ}{b + 2b \sin 54^\circ} \cdot 2\pi.$$

A feladat feltétele szerint: $V_a = V_b$, amiből az egyszerűsítések és összevonások után:

$$\frac{2}{3} b^3 \sin^2 72^\circ \cdot (1 + \sin 54^\circ) = \frac{5}{4} a^3 \operatorname{tg}^2 54^\circ.$$

A szögfüggvények pontos értékei:

$$\sin 72^\circ = \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}, \quad \sin 54^\circ = \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{5}\right), \qquad \operatorname{tg} 54^\circ = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}.$$

Ezeket beírva és az egyszerűsítéseket elvégezve:

$$b^3\left(3\sqrt{5}+5\right)=6a^3\left(\sqrt{5}+2\right),\quad \text{amiből}\quad \frac{a^3}{b^3}=\frac{3\sqrt{5}+5}{6\sqrt{5}+12}.$$

A keresett arány:

$$\frac{a}{b}=\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{5}+5}{6\sqrt{5}+12}}\approx 0{,}772.$$

Schwarz Gergő
dolgozata alapján