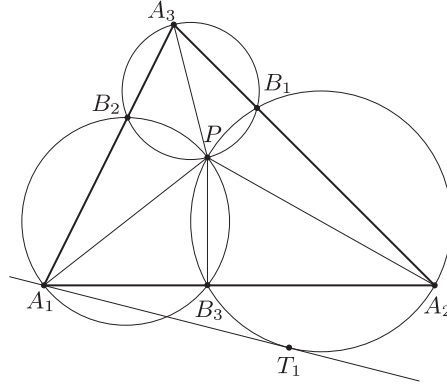


Megoldás. Jelölje a PA_i átmérőjű kört k_i ($i = 1, 2, 3$). Legyenek a P pontból az A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_1 oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjai rendre B_3 , B_1 , B_2 az *ábra* szerint.

A megfelelő körök második metszéspontja minden esetben a B_i pont. Igazoljuk ezt például a B_3 pontra: az A_1P és A_2P a k_1 , illetve k_2 körök átmérői; B_3 a P -ből állított merőleges talppontja az A_1A_2 oldalon, így mindkét körnek pontja a Thálesz-tétel miatt.



Írjuk fel az A_1 pont k_2 körre vonatkozó hatványát kétféleképpen:

$$A_1T_1^2 = A_1B_3 \cdot A_1A_2.$$

A többi körre is felírva ugyanezt látjuk, hogy

$$\begin{aligned} A_2T_2^2 &= A_2B_1 \cdot A_2A_3, \\ A_3T_3^2 &= A_3B_2 \cdot A_3A_1. \end{aligned}$$

Most írjuk fel a PA_1B_3 , a PA_2B_1 és a PA_3B_2 háromszögekre a Pitagorasz-tételt:

$$\begin{aligned} (1) \quad PA_1^2 &= PB_3^2 + A_1B_3^2, \\ (2) \quad PA_2^2 &= PB_1^2 + A_2B_1^2, \\ (3) \quad PA_3^2 &= PB_2^2 + A_3B_2^2. \end{aligned}$$

Ezután pedig a PB_3A_2 háromszögre írjuk fel a Pitagorasz-tételt, de kicsit másképpen, az előző adatokra támaszkodva:

$$PB_3^2 + (A_1A_2 - A_1B_3)^2 = PA_2^2.$$

Ezt kifejtve látjuk, hogy a kétszeres szorzat a korábbiak alapján $2 \cdot A_1T_1^2$ -re cserélhető.

$$\begin{aligned} PB_3^2 + A_1A_2^2 - 2 \cdot A_1A_2 \cdot A_1B_3 + A_1B_3^2 &= PA_2^2, \\ (4) \quad PB_3^2 + A_1A_2^2 - 2 \cdot A_1T_1^2 + A_1B_3^2 &= PA_2^2. \end{aligned}$$

Ugyanígyen módon kapjuk a PB_1A_3 és PB_2A_1 háromszögekre, hogy

$$\begin{aligned} (5) \quad PB_1^2 + A_2A_3^2 - 2 \cdot A_2T_2^2 + A_2B_1^2 &= PA_3^2, \\ (6) \quad PB_2^2 + A_3A_1^2 - 2 \cdot A_3T_3^2 + A_3B_2^2 &= PA_1^2. \end{aligned}$$

Most adjuk össze az (1)–(6) egyenleteket:

$$\begin{aligned} &PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 + PB_3^2 + A_1A_2^2 - 2 \cdot A_1T_1^2 + A_1B_3^2 + PB_1^2 + \\ &+ A_2A_3^2 - 2 \cdot A_2T_2^2 + A_2B_1^2 + PB_2^2 + A_3A_1^2 - 2 \cdot A_3T_3^2 + A_3B_2^2 = \\ &= PB_3^2 + A_1B_3^2 + PB_1^2 + A_2B_1^2 + PB_2^2 + A_3B_2^2 + PA_2^2 + PA_3^2 + PA_1^2, \end{aligned}$$

majd végezzük el a lehetséges egyszerűsítéseket:

$$A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_1^2 = 2(A_1T_1^2 + A_2T_2^2 + A_3T_3^2),$$

ezzel éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.