

Megoldás. Az első néhány érték kiszámolásával megsejthető, hogy ha $n > 1$, akkor $a_n = (n-1)(n-3)\dots$ (azaz $a_{2k} = (2k-1)(2k-3) \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$, illetve $a_{2k+1} = 2k(2k-2)\dots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$). Teljes indukcióval belátjuk, hogy ez valóban így van.

i) Az $n = 2, 3, 4$ esetén ez nyilvánvalóan igaz, hiszen $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = \frac{2 \cdot 1 + 1!}{1} = 3$.

ii) Tegyük fel, hogy az állítás $n+2$ -ig igaz; ekkor $a_{n+2} = (n+1)(n-1)\dots$, $a_{n+1} = n(n-2)\dots$, valamint $a_n = (n-1)(n-3)\dots$. Ezek felhasználásával belátjuk a feladat állítását $n+3$ -ra:

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+2}a_{n+1} + n!}{a_n}.$$

Vegyük észre, hogy az indukciós feltevés miatt

$$\begin{aligned} a_{n+2}a_{n+1} &= ((n+1)(n-1)\dots) \cdot (n(n-2)\dots) = \\ &= (n+1)n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = (n+1)!, \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= \frac{(n+1)! + n!}{a_n} = \frac{(n+1)n! + 1 \cdot n!}{a_n} = \\ &= \frac{(n+2)n(n-1)(n-2)(n-3)\dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-1)(n-3)\dots} = \\ &= (n+2)n(n-2)(n-4) \cdot \dots \end{aligned}$$

Megjegyzés. Lényegében ugyanígy bizonyíthattuk volna teljes indukcióval, hogy $a_{n+1} = \frac{n!}{a_n}$, ebből is egyszerűen következik, hogy $a_n = (n-1)(n-3)\dots$.