

I. megoldás. 1. Az egyenlet mindkét oldalát zárt alakra hozzuk az (*Hermite-féle*)

$$\sum_{i=0}^{k-1} \left[x + \frac{i}{k} \right] = [kx]$$

azonosság felhasználásával, ahol k pozitív egész, x pedig tetszőleges valós szám. Ezt például a következőképpen láthatjuk be. Mivel minden m egészre és y valós számra $[y+m] = [y] + m$, az azonosságot elég arra az esetre bizonyítani, amikor $0 \leq x < 1$. Ekkor az összeg minden tagjára $0 \leq [x + \frac{i}{k}] < 2$, így a bal oldal értéke azoknak az i indexeknek a száma, amelyekre $(0 \leq i \leq k-1 \text{ és }) [x + \frac{i}{k}] = 1$, azaz $x + \frac{i}{k} \geq 1$. Az utóbbi egyenlőtlenség átrendezve: $kx \geq k-i$. Ez annyi i -re teljesül, amennyi szám az $1, 2, \dots, k$ számok közül nem nagyobb kx -nél, az pedig éppen $[kx]$.

2. Térjünk rá a feladatbeli egyenletre:

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=0}^{a-1} \left[\frac{n+k_1b}{ab} \right] &= \sum_{k_2=0}^{b-1} \left[\frac{n+k_2a}{ab} \right], \\ \sum_{k_1=0}^{a-1} \left[\frac{n}{ab} + \frac{k_1}{a} \right] &= \sum_{k_2=0}^{b-1} \left[\frac{n}{ab} + \frac{k_2}{b} \right]. \end{aligned}$$

Az Hermite-azonosság felhasználásával:

$$\left[\frac{n}{ab} a \right] = \left[\frac{n}{ab} b \right], \quad \text{azaz} \quad \left[\frac{n}{b} \right] = \left[\frac{n}{a} \right].$$

Mivel a és b szerepe egyenértékű, feltehető, hogy $a \leq b$. Ha $a = b$, akkor triviális módon végtelen sok (minden) n -re teljesül az egyenlet. A továbbiakban legyen $a < b$. Mivel $n = 0$ nyilván megoldás, az egyenlet pozitív egész megoldásait számoljuk meg. Ilyen biztosan nem létezik, ha $a = 1$, ezért feltesszük, hogy $a \geq 2$. Az $n > 0$ pontosan akkor megoldás, ha van olyan t (nemnegatív) egész szám, amelyre

$$t \leq \frac{n}{b} < \frac{n}{a} < t+1, \quad \text{azaz} \quad tb \leq n < at+a.$$

Ilyen n csak akkor létezik, ha $tb \leq at+a-1$, vagyis $t \leq e := \left[\frac{a-1}{b-a} \right]$. Minden ilyen t -re a megoldások száma éppen a pozitív egészek száma tb -tól $at+a-1$ -ig, tehát $t = 0$ esetén $a-1$, egyébként pedig $(at+a-1) - (tb-1) = t(a-b) + a$. Tehát $2 \leq a < b$ esetén a megoldások száma

$$1 + (a-1) + \sum_{t=1}^e (t(a-b) + a) = \frac{e+1}{2} (2a + e(a-b)).$$

II. megoldás. Ezúttal is felteszük, hogy $a < b$. Az egyenlet bal oldalán a tagok száma a , a jobb oldalon pedig b . A bal oldalon az $(a-i)$ -edik tag $\left[\frac{n+(a-i)b}{ab} \right]$, ami legfeljebb akkora, mint a jobb oldalon a $(b-i)$ -edik tag, $\left[\frac{n+(b-i)a}{ab} \right]$, hiszen $n+(a-i)b \leq n+(b-i)a$. Mivel mindkét összeg tagjai nemnegatívok, a bal oldali összeg legfeljebb akkora, mint a jobb oldali. Egyenlőség tehát csak úgy állhat fenn, ha minden $0 \leq i \leq a-1$ -re

$$\left[\frac{n+(a-i)b}{ab} \right] = \left[\frac{n+(b-i)a}{ab} \right],$$

a jobb oldali összeg fennmaradó

$$\left[\frac{n+(b-a)a}{ab} \right], \quad \left[\frac{n+(b-a-1)a}{ab} \right], \quad \dots, \quad \left[\frac{n+a}{ab} \right], \quad \left[\frac{n}{ab} \right]$$

tagjainak értéke pedig nulla. Ez utóbbi feltétel azt jelenti, hogy közülük a legnagyobb, $\left[\frac{n+(b-a)a}{ab} \right]$ nulla, azaz $\frac{n+(b-a)a}{ab} < 1$, vagyis $n < a^2$. A két összeg tagjai közül a legnagyobb

$$\left[\frac{n+(b-1)a}{ab} \right] \leq \frac{n+(b-1)a}{ab} = \frac{n}{ab} + \frac{(b-1)}{b} < \frac{a^2}{ab} + \frac{(b-1)}{b} < 2,$$

ezért mindegyik egészrész vagy 1 vagy 0. Így n pontosan akkor megoldás, ha létezik olyan $0 \leq i \leq a-1$, amelyre a bal oldalon az első $a-i-1$ tag nulla, a többi 1, míg a jobb oldalon az első $b-i-1$ tag nulla, a többi pedig 1.

Figyelembe véve a két oldal tagjainak egymáshoz viszonyított nagyságát és azt, hogy mindkét összegben a tagok növekvő sorrendben követik egymást, ez pontosan akkor következik be, ha

$$\frac{n + (a - i)b}{ab} \geq 1 > \frac{n + (b - i - 1)a}{ab}, \quad \text{azaz} \quad (i + 1)a > n \geq ib.$$

Csak akkor van e feltételt kielégítő n , ha $(i + 1)a > ib$, vagyis $i \leq \left[\frac{a - 1}{b - a} \right] = e$. Ilyenkor – adott i -re – $(i + 1)a - 1 - (ib - 1) = (i + 1)a - ib$ darab n felel meg. Tehát az egyenlet nemnegatív egész megoldásainak száma

$$\sum_{i=0}^e (i + 1)a - ib = \frac{e + 1}{2} ((e + 2)a - eb).$$