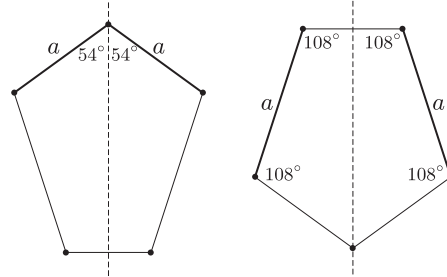


Megoldás. Legyen $i = 1, 2, 3, 4, 5$ és jelölje az ötszög csúcsait A_i , az A_i csúccsal szemközti oldalt a_i , az a_i szakaszt tartalmazó egyenesen az A_i csúctól m_i távolságra lévő pontot pedig T_i . Mivel P minden szöge 108° , az $A_i T_i$ szakasz felezi az ötszög A_i -nél lévő belső szögét. A magasságok különbözőségéből következik az oldalak hosszának különbözősége. Ha ugyanis valamely A_i csúcsban találkozó két oldal lenne egyenlő hosszú, akkor a szögek egyenlősége miatt az $A_i T_i$ egyenes P szimmetriatengelye lenne, ha pedig két nem szomszédos oldal lenne egyenlő hosszú, akkor annak az oldalnak a felezőmerőlegesére lenne szimmetrikus P , amelynek a két egyenlő oldal mindegyikével van közös csúcsa (1. ábra). Tengelyesen szimmetrikus ötszög magasságai közt viszont vannak egyenlőek.

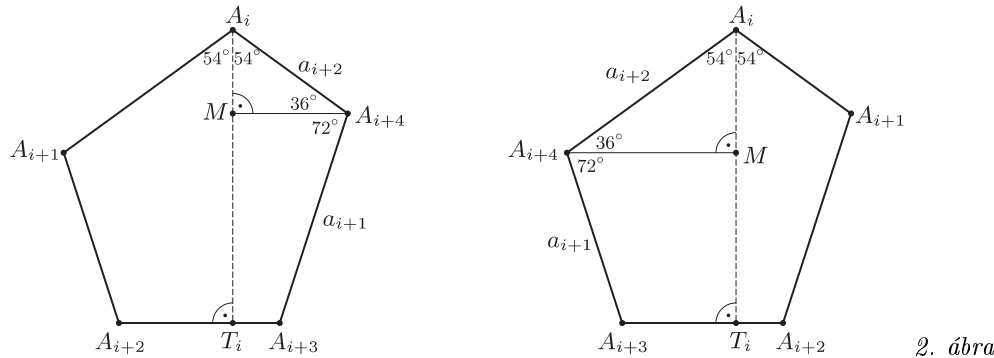


1. ábra

Először megmutatjuk, hogy bármelyik irányban számozzuk is a csúcsokat, az indexeket modulo 5 tekintve teljesülnek az

$$(1) \quad m_i = a_{i+2} \sin 36^\circ + a_{i+1} \sin 72^\circ = a_{i+3} \sin 36^\circ + a_{i+4} \sin 72^\circ$$

összefüggések. Legyen az A_{i+4} pontból az $A_i T_i$ egyenesre állított merőleges talppontja M . Az ötszög minden szöge 108° , ezért az ötszög konvex, amiből következik, hogy M az $A_i T_i$ szakasz belső pontja; ezért $A_i M + M T_i = A_i T_i$. Az $A_i A_{i+4} M$ derékszögű háromszögben az A_i -nél lévő szög 54° , (mert $A_i T_i$ felezi az ötszög A_i -nél lévő szögét), ezért az A_{i+4} -nél lévő szög 36° , s így $A_i M = a_{i+2} \sin 36^\circ$ (2. ábra). Mivel az $A_{i+4} A_{i+3}$ szakasz $A_i T_i$ egyenesre eső merőleges vetülete $M T_i$ és $M A_{i+4} A_{i+3} \angle = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$, azért $M T_i = a_{i+1} \sin 72^\circ$. Ezeket összeadva pedig adódik az (1) összefüggés első fele. A második részt ugyanígy bizonyíthatjuk, csak az A_{i+1} csúcsból kell merőlegest állítanunk az $A_i T_i$ szakaszra.



2. ábra

Az (1) összefüggések alapján viszont a magasságok közti egyenlőtlenségeket könnyen átírhatjuk az ötszög oldalaira vonatkozó egyenlőtlenségekké. Mivel

$$\begin{aligned} m_1 - m_3 &= (a_3 \sin 36^\circ + a_2 \sin 72^\circ) - (a_1 \sin 36^\circ + a_2 \sin 72^\circ) = \\ &= (a_3 - a_1) \sin 36^\circ, \end{aligned}$$

azért $m_1 > m_3$ pontosan akkor teljesül, ha $a_3 > a_1$. Ugyanígy kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} m_3 - m_4 &= (a_1 \sin 36^\circ + a_2 \sin 72^\circ) - (a_1 \sin 36^\circ + a_5 \sin 72^\circ) = \\ &= (a_2 - a_5) \sin 72^\circ, \\ m_4 - m_5 &= (a_2 \sin 36^\circ + a_3 \sin 72^\circ) - (a_2 \sin 36^\circ + a_1 \sin 72^\circ) = \\ &= (a_3 - a_1) \sin 72^\circ, \\ m_5 - m_2 &= (a_2 \sin 36^\circ + a_1 \sin 72^\circ) - (a_5 \sin 36^\circ + a_1 \sin 72^\circ) = \\ &= (a_2 - a_5) \sin 36^\circ. \end{aligned}$$

Összefoglalva tehát $m_1 > m_3 > m_4 > m_5 > m_2$ pontosan akkor teljesül, ha $a_3 > a_1$ és $a_2 > a_5$.

Az oldalak nagyságrendjére vonatkozó két egyenlőség teljesülését pedig elérhetjük pl. a következő választással. Legyen a_2 a leghosszabb oldal és válasszuk az irányítást úgy, hogy a két szomszédja közül a_1 legyen a kisebb. Az a_2 másik szomszédja a_3 , ezért $a_3 > a_1$, az $a_2 > a_5$ egyenlőtlenség pedig azért teljesül, mert a_2 a legnagyobb oldal. Tehát így a feltételeknek megfelelően számozzuk meg az oldalakat.

Strenner Péter