I. megoldás. Jelöljük a feladatban szereplő egész számot d-vel. A kapott egyenletet gyöktelenítsük; szorozzuk be 2-vel, rendezzük át, majd emeljük négyzetre.

$$\frac{4x+1-\sqrt{8x+1}}{2} = d,$$
$$4x+1-\sqrt{8x+1} = 2d,$$
$$4x+1-2d = \sqrt{8x+1},$$
$$16x^2+1+4d^2+8x-4d-16xd = 8x+1.$$

Rendezés és 4-gyel történő egyszerűsítés után $4x^2+d^2-d-4xd=0$. Most mindkét oldalhoz hozzáadva d-t látjuk, hogy a bal oldalon teljes négyzet maradt.

$$4x^2+d^2-4xd = d,$$
$$(2x-d)^2 = d.$$

A teljes négyzet mindkét tagja egész, így tehát d biztosan négyzetszám.

II. megoldás. Adjunk meg úgy egy másodfokú egyenletet, hogy ez a kifejezés legyen az egyik megoldás. Itt az x természetesen már egész paraméter. A másodfokú egyenletben a szokásos jelölések mellett az a-t választhatjuk 1-nek, a b-t pedig $-(4x+1)$-nek. A diszkrimináns $8x+1$, így a b választása miatt

$$8x+1 = (4x+1)^2-4c,$$

ahonnan $c=4x^2$. A másodfokú egyenlet tehát

$$y^2-(4x+1)y+4x^2=0.$$

Ebben az egyenletben az x és az y is egész szám. Oldjuk meg most ezt az egyenletet x-re.

$$4x^2-4yx+y^2-y=0,$$
$$x_{1,2} = \frac{4y\pm\sqrt{16y^2-16y^2+16y}}{8} = \frac{y}{2}\pm\frac{\sqrt{y}}{2}.$$

Így $2x=y\pm\sqrt{y}$, ahol $2x$ és y egészek, tehát $\sqrt{y}$ is egész. Ekkor viszont a négyzete, y valóban négyzetszám.