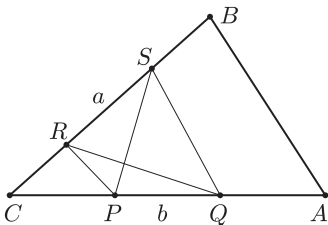


A háromszög területe legyen egységnyi, a négy pontot pedig jelölje P, Q, R, S az *ábra* szerint.



Legyen továbbá $CP = p \cdot AC$, $QC = q \cdot AC$, $0 < p < q < 1$ és $CR = r \cdot BC$, $CS = s \cdot BC$, $0 < r < s < 1$. Ekkor $PQ = x \cdot AC$ és $RS = y \cdot BC$, ahol $0 < x = q - p < 1 - p$, valamint $0 < y = s - r < 1 - r$.

A PQR háromszög területe (mivel ABC területét egységnyinek választottuk):

$$\begin{aligned} T_{PQR} &= T_{QRC} - T_{PRC} = \frac{1}{2}q \cdot AC \cdot r \cdot BC \cdot \sin \gamma - \frac{1}{2}p \cdot AC \cdot r \cdot BC \cdot \sin \gamma = \\ &= (qr - pr) \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \gamma = (q - p)r < (1 - p)r. \end{aligned}$$

Hasonlóan kapjuk az RSP háromszög területére

$$\begin{aligned} T_{RSP} &= T_{SPC} - T_{PRC} = \frac{1}{2}s \cdot BC \cdot p \cdot AC \cdot \sin \gamma - \frac{1}{2}p \cdot AC \cdot r \cdot BC \cdot \sin \gamma = \\ &= (sp - rp) \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \gamma = (s - r)p < (1 - r)p. \end{aligned}$$

Elegendő megmutatni, hogy valamelyik nem nagyobb $1/4$ -nél. Ha mindkettő nagyobb lenne, mint $1/4$, akkor négyzetgyökvonás után a számtani-mértani közép-re vonatkozó egyenlőtlenség alkalmazásával

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < \sqrt{(1-p)r} + \sqrt{(1-r)p} \leq \\ &\leq \frac{1-p+r}{2} + \frac{1-r+p}{2} = \frac{2-p+r-r+p}{2} = 1. \end{aligned}$$

Ellentmondásra jutottunk, tehát legalább az egyik terület biztosan nem nagyobb, mint $1/4$. Ha a P és R pontokat az AC , illetve a BC oldalak felezőpontjának választjuk, továbbá $Q \equiv A$ és $S \equiv B$, akkor látható az is, hogy a feladat állítása nem javítható.