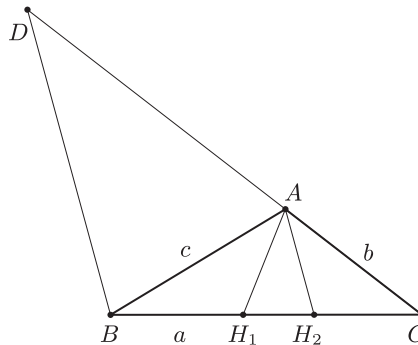


Vegyük fel az A csúsból kiinduló szögharmadolót, metszéspontjuk az a oldallal legyen H_1 és H_2 . Vizsgáljuk először az ACH_2 háromszöget. Szögei γ , $\frac{\alpha}{3}$ és $180^\circ - \frac{\alpha}{3} - \gamma$. A szinusztétel alapján:

$$\frac{b}{CH_2} = \frac{\sin(180^\circ - \frac{\alpha}{3} - \gamma)}{\sin \frac{\alpha}{3}} = \frac{\sin(\frac{\alpha}{3} + \gamma)}{\sin \frac{\alpha}{3}}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{b}{\sin(\frac{\alpha}{3} + \gamma)} = \frac{CH_2}{\sin \frac{\alpha}{3}}.$$

Hasonlóan az ABH_1 háromszögből kapjuk, hogy

$$\frac{c}{BH_1} = \frac{\sin(\frac{\alpha}{3} + \beta)}{\sin \frac{\alpha}{3}} \Rightarrow \frac{c}{\sin(\frac{\alpha}{3} + \beta)} = \frac{BH_1}{\sin \frac{\alpha}{3}}.$$



Ezeket a feladatban szereplő egyenlőtlenségbe helyettesítve ezt kapjuk:

$$\frac{CH_2}{\sin \frac{\alpha}{3}} + \frac{BH_1}{\sin \frac{\alpha}{3}} > \frac{2a}{3 \sin \frac{\alpha}{3}},$$

illetve egyszerűsítve:

$$(1) \quad CH_2 + BH_1 > \frac{2}{3} a.$$

Ha ezt belátjuk, beláttuk az állítást.

Húzzunk párhuzamost a B ponton keresztül AH_2 -vel, ennek AB -vel való metszéspontja legyen D . Az ABD háromszög szögei ekkor $\frac{\alpha}{3}$, $\frac{2\alpha}{3}$, $180^\circ - \alpha$. A szinusztétel alapján:

$$\frac{AD}{c} = \frac{\sin \frac{2\alpha}{3}}{\sin \frac{\alpha}{3}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{3} \cos \frac{\alpha}{3}}{\sin \frac{\alpha}{3}} = 2 \cos \frac{\alpha}{3}.$$

Tehát $AD = c \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{3}$. A párhuzamos szelők tétele alapján:

$$\frac{CH_2}{a} = \frac{b}{b + AD} = \frac{b}{b + c \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{3}} \Rightarrow CH_2 = \frac{ab}{b + c \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{3}}.$$

Hasonló módon beláthatjuk, hogy

$$BH_1 = \frac{ac}{c + b \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{3}}.$$

Ezek alapján:

$$CH_2 + BH_1 = \frac{ab}{b + c \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{3}} + \frac{ac}{c + b \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{3}}.$$

Mivel $\cos \frac{\alpha}{3} < 1$, a nevezőket növelve:

$$CH_2 + BH_1 > \frac{ab}{b + c \cdot 2} + \frac{ac}{c + b \cdot 2} = a \cdot \left(\frac{b}{b + 2c} + \frac{c}{c + 2b} \right).$$

Tehát (1)-hez elegendő belátni, hogy $\frac{b}{b + 2c} + \frac{c}{c + 2b} \geq \frac{2}{3}$. Közös nevezőre hozva:

$$\frac{bc + 2b^2 + bc + 2c^2}{bc + 2b^2 + 2c^2 + 4bc} = \frac{2b^2 + 2bc + 2c^2}{2b^2 + 5bc + 2c^2} \geq \frac{2}{3}.$$

Minden érték pozitív, így átszorozva

$$6b^2 + 6bc + 6c^2 \geq 4b^2 + 10bc + 4c^2, \quad \text{azaz}$$

$$2b^2 - 4bc + 2c^2 \geq 0,$$

$$2(b - c)^2 \geq 0.$$

Tehát az állítás igaz.