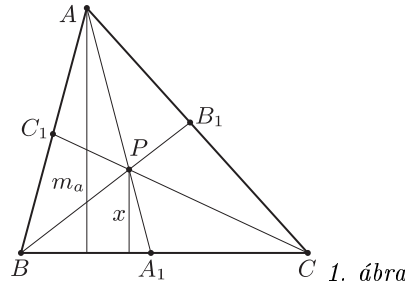


Jelöljük a háromszög magasságait a szokásos módon m_a , m_b , m_c -vel, legyen továbbá a P pontnak az oldalegyenestől való távolsága rendre x , y és z . Mivel P a háromszög belső pontja,

$$T_{ABC} = T_{BCP} + T_{CAP} + T_{ABP}.$$



Ebből, felhasználva, hogy közös alapú háromszögek területének aránya megegyezik magasságaik arányával, az

$$(1) \quad 1 = \frac{T_{BCP}}{T_{ABC}} + \frac{T_{CAP}}{T_{ABC}} + \frac{T_{ABP}}{T_{ABC}} = \frac{x}{m_a} + \frac{y}{m_b} + \frac{z}{m_c}.$$

összefüggés adódik.

A párhuzamos szelők tétele szerint viszont:

$$\frac{x}{m_a} = \frac{PA_1}{AA_1} = \frac{PA_1}{AP + PA_1} = \frac{3}{AP + 3},$$

és ugyanígy

$$\frac{y}{m_b} = \frac{3}{BP + 3}, \quad \frac{z}{m_c} = \frac{3}{CP + 3}.$$

Ezeket beírva az (1) egyenletbe majd rendezve kapjuk, hogy

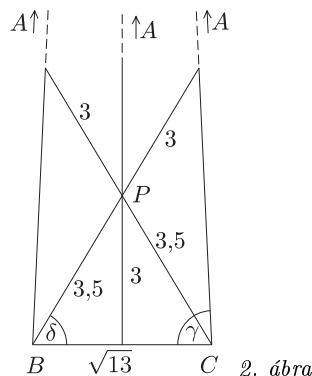
$$\begin{aligned} 1 &= \frac{3}{AP + 3} + \frac{3}{BP + 3} + \frac{3}{CP + 3}, \\ (AP + 3)(BP + 3)(CP + 3) &= \\ &= 3((BP + 3)(CP + 3) + (AP + 3)(CP + 3) + (AP + 3)(BP + 3)). \end{aligned}$$

Ebből pedig

$$\begin{aligned} AP \cdot BP \cdot CP &= \\ &= 3((AP \cdot BP + BP \cdot CP + CP \cdot AP) + 6(AP + BP + CP) + 27) - \\ &\quad - (3(AP \cdot BP + BP \cdot CP + CP \cdot AP) + 9(AP + BP + CP) + 27) = \\ &= 9(AP + BP + CP) + 54 = 9 \cdot 43 + 54 = 441, \end{aligned}$$

ami épp a bizonyítandó állítás.

Megjegyzés. A feladat megoldásából nem következik, hogy létezik olyan háromszög és a belsejében olyan P pont, melyre teljesülnek a feltételek. Ha megpróbálunk ilyet rajzolni, észrevehetjük, hogy a P pont mindhárom oldalhoz aránylag „közel” kell, hogy legyen. A legegyszerűbb példa az az egyenlőszárú háromszög, amelynek alapja $BC = \sqrt{13}$, alaphoz tartozó magassága 39, a P pont pedig ezen a magasságon van. Ekkor $AP = 36$ és $BP = CP = 3,5$. A 2. ábrán ennek a háromszögnek az alaphoz közeli része látható.



Az ábrán jelölt szögek

$$\gamma = \operatorname{arctg} 6\sqrt{13} \approx 87,35^\circ \quad \text{és} \quad \delta = \operatorname{arctg} \frac{6}{\sqrt{13}} \approx 59,00^\circ.$$