Az állítás ekvivalens a következő abszolútértékes egyenlőtlenséggel:

$$\left|\frac{(x+y)(1-xy)}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Az abszolútérték tulajdonságai alapján

$$\left|\frac{(x+y)(1-xy)}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}\right| = \frac{\left|(x+y)(1-xy)\right|}{\left|\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\right|} = \frac{|x+y|\,|1-xy|}{\left|1+x^2\right|\,\left|1+y^2\right|}.$$

Most alkalmazzuk a számlálóban a szorzatra az ismert $ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$ becslést. (Ezt tekinthetjük a mértani- és négyzetes közép közötti egyenlőtlenségnek, illetve az $(a-b)^2 \geq 0$ egyenlőtlenség átrendezésének is.) Emellett végezzük el a beszorzást a nevezőben:

$$\frac{|x+y|\,|1-xy|}{\left|1+x^2\right|\,\left|1+y^2\right|} \leq \frac{\frac{(x+y)^2+(1-xy)^2}{2}}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+2xy+y^2+1-2xy+x^2y^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2} = \frac{1}{2}.$$

Az állítás első lépésben kapott ekvivalens alakját ezzel bizonyítottuk. Meg kell még vizsgálnunk az egyenlőség esetét. Egyenlőség pontosan akkor van, ha a tagok a mértani-négyzetes becslésnél megegyeznek. Azaz, ha $|x+y| = |1-xy|$. Ez ebben a formában még nem ad választ, hogy mekkora is x és y az egyenlőség esetén. Alkalmazzuk az $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$, $\alpha, \beta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ helyettesítést. Ha $x \cdot y = 1$, akkor a bal oldalon 2, a jobb oldalon 0 adódik, nem kapunk megoldást. Ha $x \cdot y \neq 1$, kapjuk, hogy

$$1 = \frac{|x+y|}{|1-xy|} = \frac{|\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta|}{|1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta|} = \left|\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\right|.$$

Ennek megoldásai $\alpha+\beta \in \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$. Itt az a nem szokványos helyzet áll elő, hogy minden x értékhez két olyan y is tartozik, amelyre egyenlőség teljesül. Például $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ esetén, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ és $\beta = \frac{\pi}{12}$ vagy $\beta = -\frac{5\pi}{12}$. Mindkét β érték a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumba esik.

Megjegyzések. 1. Egy addíciós tételeket felhasználó, áttekinthető, rövid megoldást kapunk, ha mindjárt a megoldás kezdetén alkalmazzuk az $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$ helyettesítést. Itt természetesebben adódik az igény az egyenlőség lehetőségeinek vizsgálatára.

2. Jellemző hiba volt, hogy a versenyzők nem vizsgálták az egyenlőség eseteit, emiatt nagyon magas a 3 pontos dolgozatok száma.