

Legyen a három pozitív egész szám a, b, c , amelyekre $a + b + c = 2010$ és $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{58}$. A második egyenletet a nevezők szorzatával beszorozva és rendezve $58(ab + bc + ca) - abc = 0$. Defináljuk a

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$$

polinomot. Ennek az $x = 58$ helyen felvett helyettesítési értéke – felhasználva a feladat feltételeit –

$$P(58) = 58^3 - 58^2(a + b + c) + 58(ab + bc + ca) - abc = 58^3 - 2010 \cdot 58^2 = -6\,566\,528.$$

Másrészt

$$P(58) = (58 - a)(58 - b)(58 - c).$$

Legyen most $p = a - 58$, $q = b - 58$, $r = c - 58$. Ezekre teljesül az eddigiek alapján, hogy

$$pqr = 6\,566\,528 = 2^7 \cdot 29^2 \cdot 61 \quad \text{és} \quad p + q + r = a + b + c - 3 \cdot 58 = 1836.$$

Tudjuk azt is, hogy a p, q, r is pozitív egészek, mivel az a, b, c egészek reciprocai mind kisebbek $\frac{1}{58}$ -nál. Vizsgáljunk a továbbiakban két esetet aszerint, hogy a p, q, r számok közül hány osztható 29-cel.

1. Először legyen p osztható 29^2 -nel, továbbá q és r egyike sem legyen osztható 29-cel. Az összeg nagysága alapján csak két lehetőséget kell vizsgálnunk: $p = 29^2 = 841$ vagy $p = 2 \cdot 29^2 = 1682$. Ha $p = 841$, akkor $q + r = 995$, ennek megfelelően q és r közül az egyik csak páratlan lehet, azaz 1 vagy 61. Akármelyiket is tekintjük, a másik szám nem lesz 2-hatvány. Ha $p = 1682$, akkor $q + r = 154$, $q \cdot r = 2^6 \cdot 61$. Ennek szimmetrikus megoldása $q = 122$, $r = 32$. Az eredeti számok tehát ebben az esetben 1740, 180 és 90.

2. Hiányzik még annak az esetnek a vizsgálata, ha p és q osztható 29-cel, az r pedig nem. Ha p osztható 61-gyel, akkor $p = 1769$, $q + r = 67$, $q \cdot r = 2^7 \cdot 29$, nincs megoldás. Ugyanez a helyzet, ha q osztható 61-gyel. Ha 61 az r -nek osztója, akkor az r csak $r = 2^k \cdot 61$ alakú lehet, ahol $0 \leq k \leq 4$. (Ugyanis $2^5 \cdot 61$ már nagyobb, mint 1836.) A $p + q + r = 1836$ -ról tudjuk, hogy 29-cel osztva 9 maradékot ad. Ezt a $2^k \cdot 61$ -ek közül egyik sem teljesíti (3, 6, 12, 24, 19 rendre a maradékok), tehát ebben az esetben sincs megoldás.

A keresett három szám: 1740, 180, 90, amelyekre valóban

$$\frac{1}{1740} + \frac{1}{180} + \frac{1}{90} = \frac{1}{58}.$$