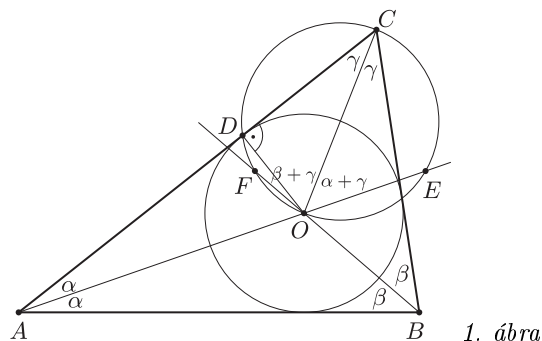


I. megoldás. A szögfelezők a háromszögbe írható kör O középpontjában metszik egymást. A D , E és F pontok mindegyikéből a CO szakasz derékszögben látszik, tehát ezek a pontok mind rajta vannak a CO szakasz k Thalész-körén.



Az ABC háromszög szögeit jelölje 2α , 2β és 2γ (1. ábra). Ekkor felhasználva, hogy bármely háromszög külső szöge megegyezik a nem mellette lévő két belső szög összegével kapjuk, hogy

$$\angle EOC = \alpha + \gamma \text{ és } \angle FOC = \beta + \gamma.$$

Mivel $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, ebből

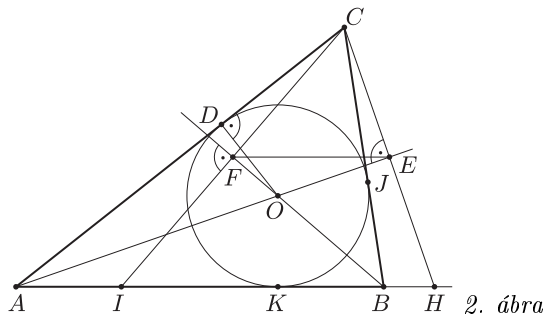
$$\angle EOF = (\alpha + \gamma) + (\beta + \gamma) = 90^\circ + \gamma$$

következik. Tehát a k körben az EF húrhoz tartozó egyik kerületi szög $90^\circ + \gamma$, így a hozzá tartozó másik kerületi szög $180^\circ - (90^\circ + \gamma) = 90^\circ - \gamma$. A COD háromszög D -nél lévő szöge derékszög, ezért

$$\angle COD = 90^\circ - \angle DCO = 90^\circ - \gamma.$$

Tehát a k körben a CD és EF húrhoz egyaránt $90^\circ - \gamma$ nagyságú kerületi szög tartozik, ezért a két húr ugyanolyan hosszú.

II. megoldás. Legyen a beírt körnek az AB , illetve BC oldalon lévő érintési pontja K , illetve J , jelölje továbbá a CE és CF egyenesek AB egyenessel való metszéspontját H és I (2. ábra), az ABC háromszög oldalainak a hosszát pedig a , b és c .



A HCA háromszögben az A csúshoz tartozó AE belső szögfelező merőleges a HC oldalra, ezért a háromszög egyenlőszárú, $HA = AC = b$. Ezért AE felezi a háromszög alapját, tehát $HE = EC$. Ugyanígy kapjuk, hogy az IBC háromszög is egyenlőszárú, $IB = BC = a$ és $IF = FC$. A HIC háromszögben tehát EF középvonal, aminek hossza a megfelelő oldal hosszának fele, azaz $EF = HI/2$. Mivel $HI = HA + BI - AB = b + a - c$, azért $EF = (a + b - c)/2$.

Tudjuk, hogy egy körhöz bármely külső pontból két egyenlő hosszúságú érintőszakasz húzható, ezért $AD = AK$, $CD = CJ$ és $BK = BJ$. Így

$$\begin{aligned} CD &= AC - AD = AC - AK = AC - (AB - BK) = AC - AB + BJ = \\ &= AC - AB + (BC - CJ) = b - c + a - CD, \end{aligned}$$

amiből átrendezéssel kapjuk, hogy $CD = (a + b - c)/2$.

Tehát $CD = EF$, ami épp a bizonyítandó állítás.