Kalina Kende megoldása. Az $f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$ egyenlőtlenségből $y = 0$ helyettesítéssel:

$$f(x) \leq f(f(x)). \tag{1}$$

Ha van olyan a, amelyre $f(a) = 0$, akkor

$$f(b+a) \leq bf(a) + f(f(a)) = f(0).$$

Mivel $a + b$ minden valós értéket felvesz, minden c-re teljesül:

$$f(c) \leq f(0), \tag{2}$$

speciálisan $f(f(0)) \leq f(0)$. Innen (1) miatt $f(0) = f(f(0))$. Ezt felhasználva:

$$f(0) = f(f(0) - f(0)) \leq -f(0)^2 + f(f(0)).$$

Mivel így $0 \leq -f(0)^2$, ebből $f(0) = 0$.

Legyen $k < 0$,

$$0 = f(k-k) \leq -kf(k) + f(f(k)), \quad \text{így} \quad kf(k) \leq f(f(k)).$$

(2) alapján a jobb oldal kisebb vagy egyenlő, mint 0, így a bal oldal is. Mivel $k < 0$, és (2) alapján $f(k) \leq 0$, így $f(k) = 0$ lehet csak.

Tehát, ha találunk egy gyököt, az állítás igaz. Így a továbbiakban indirekt felteszem, hogy $f(x) \neq 0$ minden x-re. Alkalmazzuk a következő helyettesítést:

$$f(q) \leq (q-r)f(r) + f(f(r)), \quad f(q) \leq qf(r) - rf(r) + f(f(r)).$$

(3) Ebből látszik, hogy ha van olyan r, amelyre $f(r) > 0$, akkor $f(q)$ mindig negatív, amennyiben q kisebb egy adott Q értéknél. Ha nincs ilyen r, akkor ugyanez bármilyen Q-ra igaz.

Legyen $y = f(x) - x$; ekkor:

$$0 \leq (f(x) - x)f(x), \quad \text{azaz} \quad xf(x) \leq f(x)^2.$$

(4) Innen a függvény negatívakon felveheti a következő értékeket: pozitív valósak, abszolút értékben x-nél nagyobb vagy egyenlő (tehát x-nél kisebb vagy egyenlő) negatív valósak.

Legyen h a (3) szerinti Q-nál kisebb negatív valós szám. Ekkor $f(h) \leq h$; és $f(f(h)) \leq f(h)$. Viszont (1) miatt $f(h) \leq f(f(h))$, így $f(h)$ fixpont. Illetve egy másik, $j < f(h)$-ra $f(j) = j < f(h)$ is fixpont.

Az eredeti egyenlőtlenséget a negatív $a < b$ fixpontokból képzett a és b-a számokra felírva:

$$f(a + (b-a)) \leq (b-a)f(a) + f(f(a)), \quad b \leq (b-a)a + a, \quad b - a \leq (b-a)a.$$

Mivel $a < b$, azaz $b - a > 0$, ebből $1 \leq a$, ami ellentmondás. Tehát a megoldás első fele szerint következik a feladat állítása.