Kalina Kende megoldása. Az $f(x+y) \le yf(x) + f\left(f(x)\right)$ egyenlőtlenségből $y=0$ helyettesítéssel:

$$f(x) \le f\left(f(x)\right). \tag{1}$$

Ha van olyan a, amelyre $f(a)=0$, akkor

$$f(b+a) \le bf(a) + f\left(f(a)\right) = f(0).$$

Mivel $a+b$ minden valós értéket felvesz, minden c-re teljesül:

$$f(c) \le f(0), \tag{2}$$

speciálisan $f\left(f(0)\right) \le f(0)$. Innen (1) miatt $f(0) = f\left(f(0)\right)$. Ezt felhasználva:

$$f(0) = f\left(f(0) - f(0)\right) \le -f(0)^2 + f\left(f(0)\right).$$

Mivel így $0 \le -f(0)^2$, ebből $f(0)=0$.

Legyen $k<0$,

$$0 = f(k-k) \le -kf(k) + f\left(f(k)\right), \quad \text{így} \quad kf(k) \le f\left(f(k)\right).$$

(2) alapján a jobb oldal kisebb vagy egyenlő, mint 0, így a bal oldal is. Mivel $k<0$, és (2) alapján $f(k) \le 0$, így $f(k)=0$ lehet csak.

Tehát, ha találunk egy gyököt, az állítás igaz. Így a továbbiakban indirekt felteszem, hogy $f(x) \ne 0$ minden x-re. Alkalmazzuk a következő helyettesítést:

$$f(q) \le (q-r)f(r) + f\left(f(r)\right), \quad f(q) \le qf(r) - rf(r) + f\left(f(r)\right).$$

(3) Ebből látszik, hogy ha van olyan r, amelyre $f(r)>0$, akkor $f(q)$ mindig negatív, amennyiben q kisebb egy adott Q értéknél. Ha nincs ilyen r, akkor ugyanez bármilyen Q-ra igaz.

Legyen $y = f(x) - x$; ekkor:

$$0 \le \left(f(x) - x\right) f(x), \quad \text{azaz} \quad xf(x) \le f(x)^2.$$

(4) Innen a függvény negatívakon felveheti a következő értékeket: pozitív valósak, abszolút értékben x-nél nagyobb vagy egyenlő (tehát x-nél kisebb vagy egyenlő) negatív valósak.

Legyen h a (3) szerinti Q-nál kisebb negatív valós szám. Ekkor $f(h) \le h$; és $f\left(f(h)\right) \le f(h)$. Viszont (1) miatt $f(h) \le f\left(f(h)\right)$, így $f(h)$ fixpont. Illetve egy másik, $j < f(h)$-ra $f(j) = j < f(h)$ is fixpont.

Az eredeti egyenlőtlenséget a negatív $a<b$ fixpontokból képzett a és b-a számokra felírva:

$$f\left(a + (b-a)\right) \le (b-a)f(a) + f\left(f(a)\right), \quad b \le (b-a)a + a, \quad b - a \le (b-a)a.$$

Mivel $a<b$, azaz $b-a>0$, ebből $1 \le a$, ami ellentmondás. Tehát a megoldás első fele szerint következik a feladat állítása.