

Megoldás. Megmutatjuk, hogy ha m páratlan és k pozitív egész szám, akkor $3^{2^k m} - 1$ a 2-nek pontosan a $k+2$ -edik hatványával osztható. Ha $k = 1$, akkor

$$\begin{aligned} 3^{2m} - 1 &= 9^m - 1 = (8 + 1)^m - 1 = \\ &= \left(8^m + \binom{m}{1} 8^{m-1} + \dots + \binom{m}{m-2} 8^2 + \binom{m}{m-1} 8 + 1 \right) - 1 = 8^2 v + 8m, \end{aligned}$$

ami valóban 2-nek pontosan a harmadik hatványával osztható. Ezután a k szerinti indukcióval bizonyíthatunk: ha $k \geq 1$ és $3^{2^k m} - 1 = 2^{k+2} \cdot (2w + 1)$ alakú, akkor

$$\begin{aligned} 3^{2^{k+1} m} - 1 &= (3^{2^k m} - 1) \cdot (3^{2^k m} + 1) = 2^{k+2} (2w + 1) \cdot (2^{k+2} (2w + 1) + 2) = \\ &= 2^{k+2} (2w + 1) \cdot 2(2^{k+1} (2w + 1) + 1), \end{aligned}$$

ami 2-nek pontosan a $k + 3$ -adik hatványával osztható.

A bizonyítottak szerint $3^{2^n} - 1$ akkor és csak akkor osztható 2^{2010} -nel, ha $2n$ osztható 2^{2008} -nal, azaz n osztható 2^{2007} -nel. A legkisebb ilyen pozitív egész tehát $n = 2^{2007}$.