I. megoldás. Először megmutatjuk, hogy egy szabályos ötszög síkjának minden pontjára az ötszög oldalegyeneseitől való távolságok előjeles összege állandó. (A távolságot egy oldaltól pozitívnak tekintjük, amennyiben a pont az oldalegyenesnek az ötszöggel megegyező oldalára esik, és negatívnak ellenkező esetben.) Jelölje egy tetszőleges pont oldalegyenesektől mért távolságát d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, az ötszög oldalhosszát pedig a. Ha a pontot összekötjük az ötszög csúcsaival, akkor öt olyan (esetleg elfajuló) háromszöget kapunk, amelyek előjeles területének összege megegyezik az ötszög területével. Az utóbbi állandó, ezért az előbbi:

$$\frac{ad_1}{2}+\frac{ad_2}{2}+\frac{ad_3}{2}+\frac{ad_4}{2}+\frac{ad_5}{2}=\frac{a}{2}\cdot(d_1+d_2+d_3+d_4+d_5)$$

is az, ami igazolja állításunkat.

Legyen a feladatban vizsgált ötszög $ABCDE$. Tekintsük azt a $\mathcal{K}$ szabályos ötszöget, amelynek oldalfelezőpontjai éppen A, B, C, D, E, valamint legyen P egy tetszőleges pont. Jelölje a P pont távolságát $\mathcal{K}$ oldalegyeneseitől d_A, d_B, d_C, d_D, d_E. Az A, B, C, D, E pontok ezeken az oldalegyeneseken helyezkednek el, ezért

$$d_A+d_B+d_C+d_D+d_E\le PA+PB+PC+PD+PE.$$

Az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő összeg a fentiek értelmében állandó. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a P pontból $\mathcal{K}$ oldalegyeneseire állított merőlegesek talppontjai éppen az A, B, C, D, E pontok, ez pedig csak az $ABCDE$ ötszög középpontjára teljesül. Ezzel megmutattuk, hogy a távolságok összege az ötszög középpontjára lesz minimális.

Kabos Eszter
dolgozata alapján

II. megoldás. Az ötszög középpontját jelölje O, csúcsait pozitív körüljárás szerint A, B, C, D, E, továbbá legyen r az ötszög köré írható kör sugara. Legyen P egy tetszőleges pont. A $P=P_0$ pontot O körül rendre $k\cdot 72^\circ$ nagyságú szöggel elforgatva képezzük a P_k pontokat ($1\le k\le 4$); ezek P_0-lal együtt egy szabályos ötszög csúcsait alkotják. A forgatások miatt $BP_0=AP_4$, $CP_0=AP_3$, $DP_0=AP_2$, $EP_0=AP_1$, így

$$AP+BP+CP+DP+EP=AP_0+AP_1+AP_2+AP_3+AP_4.$$

Az A pontból a $P_0P_1P_2P_3P_4$ szabályos ötszög csúcsaiba mutató vektorok összege $\sum_{k=0}^{4}\overrightarrow{AP_i}=5\overrightarrow{AO}$. Így a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$5r=5|\overrightarrow{AO}|\le\sum_{k=0}^{4}|\overrightarrow{AP_i}|=PA+PB+PC+PD+PE,$$

azaz a P pontnak az ötszög csúcsaitól való távolságainak összege legalább $5r$, egyenlőség pedig pontosan akkor teljesül, ha $P=O$. Tehát a keresett pont az ötszög középpontja.

Hegedűs Csaba
dolgozata alapján