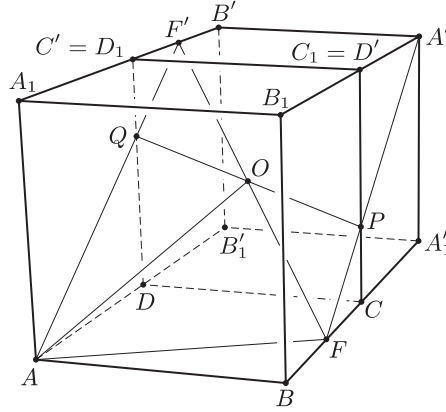


Megoldás. Keressük meg azokat a pontokat, ahol az AOF háromszög síkja metszi a CC_1 , illetve DD_1 élt. Tükrözzük a kockát az O lapközéppontra. A kocka középpontos szimmetriája miatt a C pont C' tükörképe a D_1 csúcsba kerül, a D pont D' tükörképe a C_1 csúcsba. Az F pont tükörképe, F' a D_1B' él felezőpontja lesz.



Jelölje P azt a pontot, ahol az AOF háromszög $\mathcal{S}$ síkja metszi a kocka C_1C élt, Q pedig azt a pontot, ahol az $\mathcal{S}$ sík a D_1D élt metszi. A tükrözés miatt A' és F' benne van az $\mathcal{S}$ síkban, s ezért az FA' és AF' szakaszok is az $\mathcal{S}$ síkban vannak, s velük együtt a P és Q pontok is.

Az FCP és FA'_1A' derékszögű háromszögek hasonlóak. $FC = \frac{1}{2}$, $FA'_1 = \frac{3}{2}$ és $A'_1A' = 1$. A megfelelő oldalak arányából:

$$CP : 1 = \frac{1}{2} : \frac{3}{2}, \quad \text{és innen} \quad CP = \frac{1}{3}.$$

Az $F'D_1Q$ és $F'A_1A$ hasonló háromszögekből:

$$QD_1 : AA_1 = D_1F' : A_1F', \quad \text{ahol} \quad AA_1 = 1, \quad D_1F' = \frac{1}{2}, \quad A_1F' = \frac{3}{2}.$$

Írjuk be a megfelelő értékeket az aránypárba:

$$QD_1 : 1 = \frac{1}{2} : \frac{3}{2}, \quad \text{és innen} \quad QD_1 = \frac{1}{3}.$$

P és Q ugyanolyan arányban osztja a CC_1 , illetve DD_1 párhuzamos szakaszokat, ami azt jelenti, hogy P és Q egymás tükörképei az O pontra, vagyis P , O és Q egy egyenesen vannak.

Azt állítjuk, hogy az $\mathcal{S}$ sík a kockát két testre vágja szét, amelyek közül az A, F, C, P, Q, D pontok egy csonkagúlát határoznak meg. Az AQD és FPC hasonló, egyállású, derékszögű háromszögek síkja egymással párhuzamos (hiszen a kocka két szemközti lapjáról van szó). Mindkét sík merőleges a DC egységnyi hosszúságú szakaszra. E két háromszög lesz a csonkagúla alap- és fedőlapja.

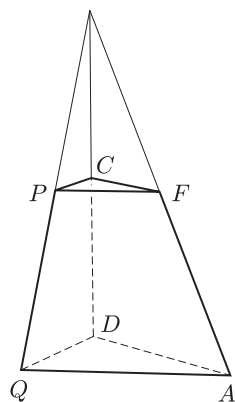
A háromszögek hasonlóságából következik, hogy az AF , DC és QP egyenesek egy pontban metszik egymást. A csonkagúla térfogata:

$$V = \frac{m}{3}(T + \sqrt{Tt} + t),$$

ahol m a magasság, T és t az alap- és fedőlap területe. Most

$$m = 1, \quad T = \frac{1 \cdot \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}, \quad t = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{12} \quad \text{és}$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{12}} + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right) = \frac{7}{36}.$$



A másik test térfogata a kocka térfogatának és a most kapott csomkagúla térfogatának különbsége:

$$V_2 = 1^3 - \frac{7}{36} = \frac{29}{36}.$$

A két térfogat aránya: $\frac{7}{36} : \frac{29}{36} = 7 : 29$.