

Az  $a = 1, b = 1, c = 1$  teljesíti a feltételeket. Belátjuk, hogy más megoldás nincs.

Ha  $a, b, c$  valamelyike 1 (a szimmetria miatt föltehetjük, hogy ez  $a$ ), akkor a többi is 1, hiszen  $b \mid 2^a - 1 = 1$  miatt  $b = 1$ , végül  $c \mid 2^b - 1 = 1$  miatt  $c = 1$ .

A továbbiakban fölteszük, hogy  $a, b, c \neq 1$ . Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy  $a, b$  és  $c$  egyike sem osztható semmilyen  $p$  prímmel.

Mivel  $2^a - 1, 2^b - 1$  és  $2^c - 1$  páratlan számok, azért  $a, b$  és  $c$  nem osztható 2-vel. Tegyük fel, hogy egy  $p \geq 3$  prím esetén a  $p$ -nél kisebb összes prímmel igaz, hogy nem osztója  $a, b, c$ -nek. Belátjuk, hogy ekkor  $p$  sem osztója egyik számnak sem.

Ezt az állítást indirekt látjuk be. Tegyük fel, hogy  $p$  osztója a három szám egyikének, mondjuk  $a$ -nak. Ekkor  $a \mid 2^c - 1$ -ből  $p \mid 2^c - 1$  következik. A kis Fermat-tétel szerint  $p \mid 2^{p-1} - 1$ . Jelölje  $d$  a legkisebb olyan pozitív egész kitevőt, amelyre  $p \mid 2^d - 1$  teljesül. Mivel a 2-hatványok  $p$ -vel való osztási maradékai periodikusan ismétlődnek, így ezekből az következik, hogy  $c$  és  $p - 1$  is többszöröse  $d$ -nek. A  $d$  nyilván nem 1 (hiszen  $2^1 = 2$  semmilyen prímmel osztva

nem ad 1 maradékot), tehát van prímosztója, és ez csak  $p$ -nél kisebb lehet (hiszen legfölbbebb  $p - 1$ ). Így  $c$  osztható egy  $p$ -nél kisebb prímmel. Ez az indukciós föltevés miatt ellentmondás, vagyis az eredeti feltevésünk hamis volt: nem lehet osztható  $p$ -vel a három szám egyike sem. Ezzel az indukciós lépést befejeztük.

Tehát valóban az  $a = 1, b = 1, c = 1$  az egyetlen megoldás.

*Ágoston Tamás*