Megoldás.

$$\begin{aligned}
&(2n-1)^{2n+1}+(2n+1)^{2n-1}=\\
=&(2n)^{2n+1}-(2n+1)(2n)^{2n}+\binom{2n+1}{2}(2n)^{2n-1}-\binom{2n+1}{3}(2n)^{2n-2}+\ldots+\\
&+\binom{2n+1}{2n}(2n)^{1}-1+(2n)^{2n-1}+\binom{2n-1}{1}(2n)^{2n-2}+\\
&+\binom{2n-1}{2}(2n)^{2n-3}+\binom{2n-1}{3}(2n)^{2n-4}+\ldots+\binom{2n-1}{2n-2}(2n)^{1}+1.
\end{aligned}$$

Az összegben a $\binom{2n+1}{2n}(2n)^{1}-1+\binom{2n-1}{2n-2}(2n)^{1}+1$ kivételével az összes tag osztható 4-gyel, mert a $2n$ minden esetben legalább 2-es kitevőn van.

$$\begin{aligned}
\binom{2n+1}{2n}(2n)-1+\binom{2n-1}{2n-2}(2n)+1&=(2n+1)(2n)+(2n-1)(2n)-1+1=\\
&=2n(2n+1+2n-1)=2n\cdot 4n=8n^{2},
\end{aligned}$$

és ez is osztható 4-gyel.

Vagyis $(2n-1)^{2n+1}+(2n+1)^{2n-1}$ valóban osztható 4-gyel.