

Megoldás. Vegyünk fel egy húrnégyszöget a, b, c, d oldalakkal. Legyen a BD átló hossza e . Ekkor a szemközti szögek összege 180° , vagyis amennyiben az A csúcsnál lévő szög α , akkor a C csúcsnál lévő szög $180^\circ - \alpha$. Írjuk fel a koszinusz-tételt az ABD és BCD háromszögekben:

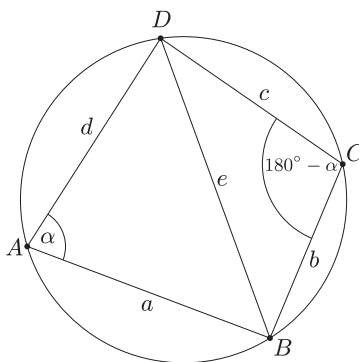
$$\begin{aligned} e^2 &= a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos \alpha, \\ e^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = \\ &= b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

A jobb oldalakat egyenlővé téve és $\cos \alpha$ -t kifejezve:

$$a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos \alpha = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos \alpha,$$

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = \cos \alpha \cdot (2ad + 2bc),$$

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc}.$$



Megfordítva: ha az $\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc}$ érték -1 és $+1$ közé esik, akkor szerkeszthető húrnégyszög az a, b, c, d szakaszokból, hiszen akkor van olyan α szög, amelynek koszinusza $\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc}$, és olyan

$$e = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha} = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha}$$

szakasz, amelyre $|a - d| < e < a + d$ és $|b - c| < e < b + c$. Ekkor a megszerkeszthető a, d, e és b, c, e oldalú háromszögeket közös e oldaluknál összeragasztva olyan négyszöget kapunk, amelynek az e átlóval szemközti szögei α és $180^\circ - \alpha$, vagyis a négyszög húrnégyszög.

Vizsgáljuk meg, hogy teljesülnek-e a -1 -re és $+1$ -re vonatkozó egyenlőtlenségek:

$$-1 < \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc},$$

$$-2ad - 2bc < a^2 + d^2 - b^2 - c^2,$$

$$0 < (a + d)^2 - (c - b)^2 = (a + d - c + b)(a + d + c - b).$$

Mivel az a, b, c, d szakaszokból négyszög szerkeszthető, azért $a + d + b > c$ és $a + d + c > b$, tehát mindkét szorzótényező pozitív, így az egyenlőtlenség fennáll. Hasonlóan, az

$$1 > \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc}$$

egyenlőtlenség ekvivalens átalakításával:

$$2ad + 2bc > a^2 + d^2 - b^2 - c^2,$$

$$0 > (a - d)^2 - (c + b)^2 = (a - d - c - b)(a - d + c + b).$$

Mivel $d + c + b > a$ és $a + c + b > d$, az első szorzótényező negatív, a második pozitív, így az egyenlőtlenség fennáll.

Tehát az a, b, c, d oldalakból húrnégyszög is szerkeszthető.