Megoldás. Vizsgáljuk meg néhány n számra a $\sum \frac{1}{xy}$ összeget. $n = 1$-re csak egy számpár van: $\frac{1}{1 \cdot 1} = 1$. Ha $n = 2$, akkor két számpár van $(1; 2)$ és $(2; 1)$, az összeg $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 1} = 1$. Ha $n = 3$, akkor 4 számpár van, $(1; 3)$, $(3; 1)$, $(2; 3)$ és $(3; 2)$, az összeg

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 2} = 1.$$

Azt sejtjük, hogy tetszőleges n-re a $\sum \frac{1}{xy}$ összeg 1. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz az indukciós feltétel. Azt kell belátnunk, hogy $n = (k + 1)$-re is igaz az állítás. Az összeg olyan $\frac{1}{xy}$ törtek összegével csökken, amelyekre $x + y = k + 1$, ugyanis ezekre még teljesül az $x + y > k$, de nem teljesül az $x + y > k + 1$ feltétel. Ugyanakkor nő az összeg az olyan $\frac{1}{xy}$ törtek összegével, amelyekre $x = k + 1$ és y relatív prímek, illetve azokkal, amelyekre $y = k + 1$ és x relatív prímek. Ezek a párok eddig nem szerepeltek, hiszen mindegyik szám kisebb volt, mint $k + 1$.

Ismert, hogy ha x és y relatív prímek, akkor $(x + y; x) = 1$ és $(x + y; y) = 1$. Ha ugyanis lenne $(x + y)$-nak és x-nek egynél nagyobb közös osztója, akkor az osztaná a két szám különbségét, vagyis y-t is, ez viszont ellentmondana annak a ténynek, hogy x és y relatív prímek. Ennek ismeretében fogjuk belátni, hogy az összeg pontosan annyival csökken, mint amennyivel nő. Az előbb láttuk, hogy minden x, y számpárhoz hozzárendelhető két számpár, $(x + y; x)$ és $(x + y; y)$, melyekre

$$\frac{1}{(x+y)x} + \frac{1}{(x+y)y} = \frac{1}{x+y}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{x+y} \cdot \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{xy}.$$

Azt is látjuk, hogy az összeget növelő tagok mindegyikének megadható az $(x; y)$ párja: ha $x + y = k + 1$ és x relatív prímek, akkor x és y is relatív prímek. A fenti megfeleltetés tehát kölcsönösen egyértelmű. Ezzel beláttuk, hogy ha k-ról $(k + 1)$-re változik az n, akkor az összeg 1 marad.

Tehát a feladatban szereplő törtek összege minden pozitív egész n esetén 1.