

**Megoldás.** Vizsgáljuk meg néhány  $n$  számra a  $\sum \frac{1}{xy}$  összeget.  $n = 1$ -re csak egy számpár van:  $\frac{1}{1 \cdot 1} = 1$ . Ha  $n = 2$ , akkor két számpár van  $(1; 2)$  és  $(2; 1)$ , az összeg  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 1} = 1$ . Ha  $n = 3$ , akkor 4 számpár van,  $(1; 3)$ ,  $(3; 1)$ ,  $(2; 3)$  és  $(3; 2)$ , az összeg

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 2} = 1.$$

Azt sejtjük, hogy tetszőleges  $n$ -re a  $\sum \frac{1}{xy}$  összeg 1. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy  $n = k$ -ra igaz az indukciós feltétel. Azt kell belátnunk, hogy  $n = (k + 1)$ -re is igaz az állítás. Az összeg olyan  $\frac{1}{xy}$  törtek összegével csökken, amelyekre  $x + y = k + 1$ , ugyanis ezekre még teljesül az  $x + y > k$ , de nem teljesül az  $x + y > k + 1$  feltétel. Ugyanakkor nő az összeg az olyan  $\frac{1}{xy}$  törtek összegével, amelyekre  $x = k + 1$  és  $y$  relatív prímelek, illetve azokkal, amelyekre  $y = k + 1$  és  $x$  relatív prímelek. Ezek a párok eddig nem szerepeltek, hiszen mindegyik szám kisebb volt, mint  $k + 1$ .

Ismert, hogy ha  $x$  és  $y$  relatív prímelek, akkor  $(x + y; x) = 1$  és  $(x + y; y) = 1$ . Ha ugyanis lenne  $(x + y)$ -nak és  $x$ -nek egynél nagyobb közös osztója, akkor az osztaná a két szám különbségét, vagyis  $y$ -t is, ez viszont ellentmondana annak a ténynek, hogy  $x$  és  $y$  relatív prímelek. Ennek ismeretében fogjuk belátni, hogy az összeg pontosan annyival csökken, mint amennyivel nő. Az előbb láttuk, hogy minden  $x, y$  számpárhoz hozzárendelhető két számpár,  $(x + y; x)$  és  $(x + y; y)$ , melyekre

$$\frac{1}{(x + y)x} + \frac{1}{(x + y)y} = \frac{1}{x + y} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{x + y} \cdot \frac{x + y}{xy} = \frac{1}{xy}.$$

Azt is látjuk, hogy az összeget növelő tagok mindegyikének megadható az  $(x; y)$  párja: ha  $x + y = k + 1$  és  $x$  relatív prímelek, akkor  $x$  és  $y$  is relatív prímelek. A fenti megfeleltetés tehát kölcsönösen egyértelmű. Ezzel beláttuk, hogy ha  $k$ -ról  $(k + 1)$ -re változik az  $n$ , akkor az összeg 1 marad.

Tehát a feladatban szereplő törtek összege minden pozitív egész  $n$  esetén 1.