

Megoldás. 1. Három szín elegendő a kívánt színezéshez. Legyen a hételemű halmaz $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Az 1-et tartalmazó háromelemű részhalmazok színe legyen piros, az 1-et nem, de a 2-t tartalmazóké kék, a többi pedig legyen sárga. Ekkor bármely két piros részhalmaz tartalmazza az 1-et, ezért nem lehetnek diszjunktak. Hasonlóan bármely két kék részhalmaznak közös eleme a 2. Tekintsünk két sárga részhalmazt; ezeknek nem eleme sem az 1, sem a 2, így elemeik legfeljebb ötfélek lehetnek: 3, 4, 5, 6 vagy 7. Két ilyen háromelemű halmaz tehát nem lehet diszjunkt, hiszen ahhoz $3 + 3 = 6$ különböző elemre lenne szükség.

2. Megmutatjuk, hogy két színnel a színezés nem valósítható meg. Tegyük fel, hogy az lenne, és tekintsük a $H_1 = \{1, 2, 3\}$, $H_2 = \{4, 5, 6\}$, $H_3 = \{1, 2, 7\}$, $H_4 = \{3, 5, 6\}$, $H_5 = \{2, 4, 7\}$, $H_6 = \{1, 3, 6\}$, $H_7 = \{4, 5, 7\}$ halmazokat. Ebben a sorrendben bármely két szomszédos helyen álló halmaz egymástól diszjunkt, ezért ha például H_1 piros, akkor H_2 kék, H_3 piros, H_4 kék, H_5 piros, H_6 kék és H_7 ismét piros. Azonban H_7 és H_1 is egymástól diszjunktak, tehát nem lehetnek egyszerre pirosak, ellentmondás.

Megjegyzés. Énekes Péter és Zsakó Balázs megemlíti a feladat következő általánosítását: *Legyen n pozitív egész. Egy $2n + 1$ elemű halmaz n elemű részhalmazait színezzük úgy, hogy bármely két diszjunkt részhalmaz különböző színű legyen. Ez legkevesebb három színnel valósítható meg.* A közölt megoldás első része változatlan formában, a második része némi módosítással alkalmas ennek az általánosabb állításnak az igazolására.