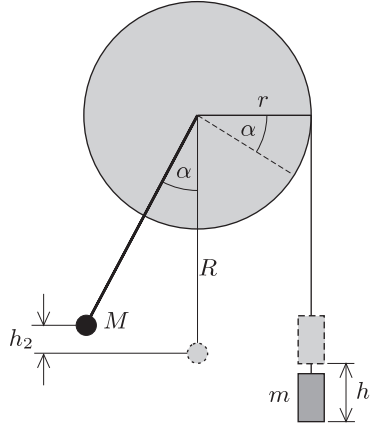




Megoldás. a) Az ábrán látható, $\alpha = 60^\circ$ -os szögelfordulásnak megfelelő helyzetben az m tömegű test az eredeti helyzetéhez képest

$$h_1 = r\alpha = 0,1 \text{ m} \cdot \frac{\pi}{3} = 0,105 \text{ m}$$

szinttel mélyebbre, a M tömegű test pedig

$$h_2 = R(1 - \cos \alpha) = 0,1 \text{ m}$$

szintkülönbségnek megfelelő értékkel magasabbra kerül. Mivel a mozgási energia kezdetben is és ebben az állapotban is nulla, a rendszer helyzeti energiája sem változhatott meg:

$$\Delta E_h = Mgh_2 - mgh_1 = 0,$$

ahonnan a rúdon lévő test tömege:

$$M = \frac{h_1}{h_2} m = 105 \text{ g}.$$

b) Az új egyensúlyi helyzetet a forgatónyomatékok egyensúlya jellemzi:

$$mgr = MgR \sin \varphi,$$

vagyis

$$\sin \varphi = \frac{mr}{MR} \approx 0,48; \quad \varphi \approx 28,6^\circ.$$

c) Az egyensúlyi állapottól $\Delta\varphi$ szöggel eltérő helyzetben (vagyis amikor a rúd $\varphi + \Delta\varphi$ szöget zár be a függőlegessel) a rendszerre ható forgatónyomaték:

$$M(\Delta\varphi) = mgr - MgR \sin(\varphi + \Delta\varphi) = mgr - MgR(\sin \varphi \cos \Delta\varphi + \cos \varphi \sin \Delta\varphi).$$

Kihasználva, hogy kicsiny szögeknél $\cos \Delta\varphi \approx 1$ és $\sin \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$, a forgatónyomaték így írható:

$$M(\Delta\varphi) = [mgr - MgR \sin \varphi] - MgR \cos \varphi \cdot \Delta\varphi.$$

A szögletes zárójelben álló kifejezés az egyensúlyi feltétel miatt *nulla*, a forgatónyomaték tehát

$$M(\Delta\varphi) = -D^* \Delta\varphi,$$

ahol $D^* = MgR \cos \varphi$ az ún. direkciós forgatónyomaték.

A forgómozgás alapegyenlete szerint:

$$M = \Theta \beta,$$

ahol $\Theta = MR^2 + mr^2$ a rendszer tehetetlenségi nyomatéka, β pedig a pillanatnyi szöggyorsulás. A szögelfordulás időbeli változását leíró $\Theta \beta = -D^* \Delta\varphi$ egyenlet és a rezgőmozgás $ma = -D \Delta x$ egyenletének hasonló alakjából leolvashatjuk, hogy a csavarodási rezgések periódusideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D^*}} = 2\pi \sqrt{\frac{MR^2 + mr^2}{MgR \cos \varphi}} \approx 1,1 \text{ s}.$$

Megjegyzés. A c) alkérdésre energetikai megfontolások alapján is válaszolhatunk. Ha a rendszert $\Delta\varphi$ szöggel kitérítjük az egyensúlyi helyzetéből, a helyzeti energia változása (a kis szögekre vonatkozó közelítő képletek alkalmazásával):

$$\begin{aligned}\Delta E_h &= E_h(\varphi + \Delta\varphi) - E_h(\Delta\varphi) = MgR \cos \varphi - MgR \cos(\varphi + \Delta\varphi) - mgr \Delta\varphi = \\ &= MgR \cos \varphi (1 - \cos \Delta\varphi) + MgR \sin \varphi \sin \Delta\varphi - mgr \Delta\varphi \approx \\ &\approx MgR \cos \varphi \cdot 2 \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} + [MgR \sin \varphi - mgr] \Delta\varphi \approx \frac{1}{2} MgR \cos \varphi \cdot (\Delta\varphi)^2.\end{aligned}$$

(Kihasználtuk, hogy a szögletes zárójelben álló kifejezés az egyensúlyi feltétel szerint 0.)

Látható, hogy az egyensúlyi helyzetéből kitérített rendszer helyzeti energiája a kitérés négyzetével arányos, éppen úgy, mint egy megnyújtott rugó rugalmas energiája. Emiatt állíthatjuk, hogy mindkét test harmonikus rezgőmozgást fog végezni, a m tömegű test rezgési amplitúdója $A_1 = r \Delta\varphi$, a M tömegű testé pedig $A_2 = R \Delta\varphi$ lesz, amennyiben $\Delta\varphi$ a maximális szögkitérés. Ha a rezgőmozgás körfrekvenciája $\omega = (2\pi)/T$, akkor az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor a mozgási energia:

$$E_m = \frac{1}{2} m (A_1 \omega)^2 + \frac{1}{2} M (A_2 \omega)^2 = \frac{1}{2} (mr^2 + MR^2) \omega^2 (\Delta\varphi)^2.$$

A helyzeti és a mozgási energia legnagyobb értékeinek egyenlőségéből a körfrekvenciára

$$\omega^2 = \frac{MgR \cos \varphi}{mr^2 + MR^2},$$

a periódusidőre pedig

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mr^2 + MR^2}{MgR \cos \varphi}} \approx 1,1 \text{ s}$$

adódik.