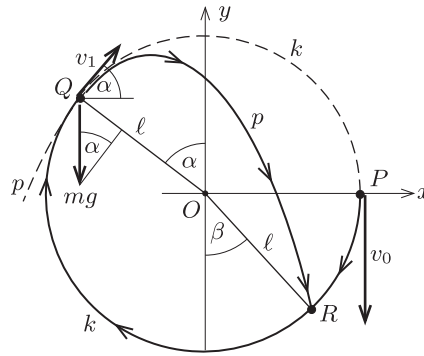


Megoldás. A P pontban v_0 sebességgel függőlegesen lefelé indított fonálinga a k körön haladva eljut az *ábrán* látható Q pontba, ahol a fonala meglazul.



Ez akkor következik be, amikor a fonálerő nullává válik, vagyis amikor az mg nehézségi erő fonálirányú komponense éppen biztosítani tudja a v_1 sebességű körmozgásnak megfelelő centripetális erőt:

$$(1) \quad \frac{mv_1^2}{\ell} = mg \cos \alpha,$$

ahol α a függőlegessel bezárt szög a megfeszüléskor. A mechanikai energia megmaradásának tételéből kiszámíthatjuk az inga nehezékének sebességét a Q pontban:

$$(2) \quad \frac{1}{2}mv_0^2 = mgl \cos \alpha + \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Az (1) és (2) összefüggésekből

$$(3) \quad v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{3}} \approx 1,155 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

valamint

$$(4) \quad \cos \alpha = \frac{v_1^2}{g\ell} \approx 0,68; \quad \text{vagyis} \quad \alpha \approx 47,2^\circ$$

következik.

A fonál meglazulása után az ingatest letér a k körpályáról, és egy v_1 kezdősebességű, α szögű ferde hajtás p parabolapályáján halad tovább. Ez a parabola valamely R pontban metszi a kört, a fonál ennél a pontnál feszül meg újra. Feladatunk az OR egyenes és a függőleges által bezárt β szög meghatározása.

Vegyünk egy olyan koordináta-rendszert, amelynek O origója az inga felfüggesztési pontja, x tengelye vízszintesen jobbra, y tengelye pedig függőlegesen felfelé mutat. Ebben a rendszerben az ingatest koordinátái t idővel a fonál meglazulása után:

$$(5) \quad x = v_1 t \cos \alpha - \ell \sin \alpha,$$

illetve

$$(6) \quad y = -\frac{g}{2}t^2 + v_1 t \sin \alpha + \ell \cos \alpha.$$

A fonál akkor feszül meg újra, amikor a végén lévő test ismét ℓ távolságra kerül a felfüggesztési ponttól. Az $x^2 + y^2 = \ell^2$ összefüggés (5) és (6) behelyettesítésével t -re egy negyedfokú egyenletet ad (összhangban azzal, hogy egy körnek és egy parabolának legfeljebb 4 közös pontja lehet):

$$t^4 \cdot \frac{g^2}{4} - t^3 \cdot v_1 g \sin \alpha = 0,$$

vagyis

$$(7) \quad t^3 \left(t - \frac{4v_1}{q} \sin \alpha \right) = 0.$$

Ennek az egyenletnek $t = 0$ *háromszoros gyöke*, ez a megoldás a Q pontnak felel meg.

Megjegyzés. Nem meglepő, hogy $t = 0$ háromszoros gyök, hiszen közvetlenül a fonál meglazulásának pillanata előtt a test *helye, sebessége és gyorsulása* ugyanakkora, mint ezek a mennyiségek közvetlenül a fonál meglazulása után. Geometriai nyelven megfogalmazva: a k kör és a p parabola Q metszéspontjában a két görbe *érintője is* és a *görbülete is* megegyezik.

A (7) egyenlet számunkra érdekes negyedik gyöke

$$(8) \quad t_4 = \frac{4v_1 \sin \alpha}{g} \approx 0,345 \text{ s},$$

a meglazulását követően ennyi idő múlva feszül meg újra a fonál. Az inga nehezékének koordinátái ekkor (5) és (6) szerint, (1) és (8) felhasználásával:

$$\begin{aligned} x_R &= x(t_4) = \ell \sin \alpha (4 \cos^2 \alpha - 1) = \ell \sin(3\alpha), \\ y_R &= y(t_4) = \ell \cos \alpha (1 - 4 \sin^2 \alpha) = -\ell \cos(3\alpha), \end{aligned}$$

amik a keresett β szöggel is kifejezhetők:

$$x_R = \ell \sin \beta, \quad y_R = -\ell \cos \beta.$$

Eszerint a fonál szöge az ismételt megfeszülés pillanatában

$$\beta = 180^\circ - 3\alpha \approx 38,4^\circ.$$