

A rész. Nem önfenntartó gázkisülés

A1. Minthogy az elektronok és ionok párokban keletkeznek, sűrűségük minden időpillanatban megegyezik, $n_e(t) = n_i(t) = n(t)$. Az elektronok sűrűsége a külső besugárzás miatt nő, a rekombináció miatt csökken, így az

$$\dot{n}(t) = Z_{\text{ext}} - Z_{\text{rek}} = Z_{\text{ext}} - rn^2$$

differenciálegyenlet írható föl. A feladat szerint az egyenlet megoldását $n(t) = n_0 + a \tanh(bt)$ alakban kereshetjük. Az $n(0) = 0$ kezdeti feltétel miatt $n_0 = 0$. Ezután az $n(t) = a \tanh(bt)$ függvényt beírva a differenciálegyenletbe, figyelembe véve, hogy $\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x}$, valamint, hogy $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, rövid számolás után azt kapjuk, hogy

$$a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}, \quad b = \sqrt{rZ_{\text{ext}}}.$$

A2. Egyetlen, Z_{ext} erősségű külső ionizáló esetén az egyensúlyi elektronsűrűség

$$(13) \quad n_e = \lim_{t \rightarrow \infty} a \tanh(bt) = a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}},$$

ahonnan $Z_{\text{ext}} = rn_e^2$, tehát két ionizálót együtt használva $Z_{\text{ext},1} + Z_{\text{ext},2} = rn_e^2$, így

$$n_e = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext},1}}{r} + \frac{Z_{\text{ext},2}}{r}} = \sqrt{n_{e1}^2 + n_{e2}^2} = 2 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^3}.$$

A3. Minthogy az elektronok és ionok sűrűsége és mobilitása is megegyezik, a két töltéshordozó mozgásából származó elektromos áram is megegyezik, tehát $I = I_e + I_i = 2I_e$. Az L hosszú, S keresztmetszetű csőben levő elektronok száma egyrészt a besugárzás miatt LSZ_{ext} -tel nő, másrészt, a rekombináció, illetve a kiáramlás miatt $SLrn_e^2$ -tel, illetve vSn_e -vel csökken időegységenként. Egyensúly esetén az elektronok száma nem változik, tehát

$$SLZ_{\text{ext}} - SLrn_e^2 - vSn_e = 0.$$

Felhasználva, hogy az elektronok driftsebessége $v = \beta E = \beta \frac{U}{L}$, a másodfokú egyenlet pozitív megoldása n_e -re:

$$(14) \quad n_e = \frac{\beta U}{2rL^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4rL^4 Z_{\text{ext}}}{\beta^2 U^2}} - 1 \right).$$

A keresett áramerősség:

$$(15) \quad I = 2I_e = 2en_e v S = \frac{eS\beta^2 U^2}{rL^3} \left(\sqrt{1 + \frac{4rL^4 Z_{\text{ext}}}{\beta^2 U^2}} - 1 \right).$$

A4. Kis U feszültség esetén a (15) kifejezésben a gyökjel alatti második tag mellett az első, $+1$ tag, és a gyökvonás után a -1 is elhanyagolható, tehát ekkor

$$I \approx \frac{eS\beta^2 U^2}{rL^3} \sqrt{\frac{4rL^4 Z_{\text{ext}}}{\beta^2 U^2}} = \frac{2eS\beta U}{L} \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}.$$

(Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha (15) egyenletben az n_e elektronsűrűség helyére nem a (14) kifejezést, hanem a zérus feszültség mellett kapott (13) értéket helyettesítjük.)

Ezt felhasználva a gáz fajlagos ellenállása:

$$\rho = \frac{US}{IL} = \frac{1}{2e\beta} \sqrt{\frac{r}{Z_{\text{ext}}}}.$$

B rész. Önfenntartó gázkisülés. Ebben a részben az egyensúlyi áramot tanulmányozzuk, így az elektronok n_e és az ionok n_i sűrűsége nem függ az időtől, viszont az elektronlavina miatt függ a helytől. A feladat feltevése értelmében az $E = \frac{U}{L}$ elektromos tér a cső mentén homogén, és az elektronok valamint ionok sebessége $v = \beta E$ állandó.

B1. Ahogy a feladatban szerepel, az x tengely mutasson az L hosszúságú gázcső mentén a növekvő elektromos potenciál irányába, azaz az elektronok mozgásának irányába. Az x és $x + dx$ közti szeletben levő elektronok száma egyrészt a besugárzás miatt $Z_{\text{ext}}Sdx$ -szel, az elektronok beáramlása miatt $vSn_e(x)$ -szel, az elektronlavina miatt pedig

$\alpha v S n_e(x) dx$ -szel nő, másrészt, az elektronok kiáramlása miatt $v S n_e(x + dx)$ -szel csökken időegységenként. Állandósult áramlás esetén azonban a teljes elektronszám nem változik, tehát

$$0 = \underbrace{Z_{\text{ext}} S dx}_{\text{besugárzás}} + \underbrace{v S n_e(x)}_{\text{beáramlás}} + \underbrace{\alpha v S n_e(x) dx}_{\text{elektronlavina}} - \underbrace{v S n_e(x + dx)}_{\text{kiáramlás}}.$$

Az egyenletet dx -szel osztva, és felhasználva, hogy az elektronok által képviselt áram $I_e(X) = e v S n_e(x)$, az

$$I_e'(x) = e S Z_{\text{ext}} + \alpha I_e(x)$$

differentiálegyenletet kapjuk, melybe behelyettesítve a megadott $I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2$ kísérletező függvényt, rövid számolás után az

$$(16) \quad A_1 = \alpha, \quad A_2 = -\frac{e S Z_{\text{ext}}}{\alpha}, \quad I_e(x) = C_1 e^{\alpha x} - \frac{e S Z_{\text{ext}}}{\alpha}$$

eredmények adódnak. (A képletekben e az elemi töltés, e pedig az Euler-féle szám.)

B2. Gondolatmenetünk az elektronáram esetéhez hasonló; állandósult áramlás esetén az x és $x + dx$ közti szeletben az ionok száma nem változik, tehát

$$0 = \underbrace{Z_{\text{ext}} S dx}_{\text{besugárzás}} - \underbrace{v S n_i(x)}_{\text{kiáramlás}} + \underbrace{\alpha v S n_e(x) dx}_{\text{elektronlavina}} + \underbrace{v S n_i(x + dx)}_{\text{beáramlás}}.$$

(Az ionok ellentétes mozgása miatt a második és negyedik tag előjele megváltozott, és az elektronlavinát leíró tagban nem n_i , hanem továbbra is n_e szerepel!) Innen az elektronáramra kapott (16) eredményt is felhasználva az

$$I_i'(x) = -e S Z_{\text{ext}} - \alpha I_e(x) = -\alpha C_1 e^{\alpha x}$$

összefüggés adódik, amit az adott $I_i(x) = C_2 + B_1 e^{B_2 x}$ formulával összevetve a

$$(17) \quad B_1 = -C_1, \quad B_2 = \alpha, \quad I_i(x) = C_2 - C_1 e^{\alpha x}$$

eredményhez jutunk.

B3. Mivel az anódból nem lépnek ki ionok, ezért $I_i(L) = 0$.

B4. A másodlagos elektronkeltés definíciójának értelmében $I_e(0) = \gamma I_i(0)$.

B5. Az előző két pontban kapott határfeltételekbe beírva a (16) és (17) formulákat megkaphatjuk a hiányzó C_1 és C_2 együtthatókat:

$$\left. \begin{aligned} C_2 - C_1 e^{\alpha L} &= 0 \\ C_1 - \frac{e S Z_{\text{ext}}}{\alpha} &= \gamma (C_2 - C_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= \frac{e S Z_{\text{ext}}}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \gamma(1 - e^{\alpha L})} \\ C_2 &= \frac{e S Z_{\text{ext}}}{\alpha} \cdot \frac{1}{e^{-\alpha L}(1 + \gamma) - \gamma}. \end{aligned}$$

A teljes áram az ionok és az elektronok járulékanak összege. Ahogy várjuk, ez már nem függ az x helytől, és értéke:

$$(18) \quad I = I_e(x) + I_i(x) = C_2 - \frac{e S Z_{\text{ext}}}{\alpha} = \frac{e S Z_{\text{ext}}}{\alpha} \left(\frac{1}{e^{-\alpha L}(1 + \gamma) - \gamma} - 1 \right).$$

B6. Elég hosszú cső esetén az elektronlavinából keletkező elektronok elegendő töltéshordozót biztosítanak az áram fenntartásához (sőt, növeléséhez) külső gerjesztés nélkül is. A (18) képletből látszik, hogy ahogy L értékét növeljük, I nő, és $L \nearrow L_{\text{kr}}$ esetén $I \rightarrow \infty$. Az L_{kr} kritikus hossz a (18) képletben szereplő tört nevezőjének zérushelye:

$$e^{-\alpha L_{\text{kr}}}(1 + \gamma) - \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad L_{\text{kr}} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{1 + \gamma}{\gamma} \right).$$