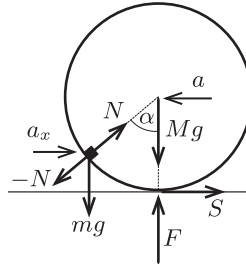


A rész. Az 1. ábra mutatja a kis testre és a csőre ható erőket: az m tömegű kis testre az mg nehézségi erő és az N nyomóerő, az M tömegű csőre az Mg nehézségi erő, a talaj F nyomóereje, az S tapadási súrlódási erő és a kis test által kifejtett $-N$ nyomóerő hat.



1. ábra. A kis testre és a csőre ható erők

Írjuk fel a mozgásegyenletet a kis test a_x vízszintes (az ábrán jobbra mutató) gyorsuláskomponensére, a cső tömegközéppontjának a (az ábrán balra mutató) gyorsulására és a cső β szöggyorsulására:

$$\begin{aligned} ma_x &= N \sin \alpha, \\ Ma &= N \sin \alpha - S, \\ \Theta \beta &= SR, \end{aligned}$$

ahol $\Theta = MR^2$ a cső tehetetlenségi nyomatéka. A cső gyorsulása és szöggyorsulása között a tiszta gördülés miatt fennáll az $a = \beta R$ kapcsolat.

Az egyenletrendszer megoldva a testek gyorsulásai között az $ma_x = 2Ma$ összefüggés adódik. A testek kezdetben nyugalomban voltak, és ez az összefüggés a mozgás során mindvégig fennáll, így a kis test u vízszintes sebességgel és a cső v sebessége között is ugyanilyen kapcsolat áll fenn: $mu = 2Mv$.

A rendszer konzervatív, így teljesül az energiamegmaradás tétele. Az egyenletet a kezdeti állapotra és arra a pillanatra írjuk fel, amikor a kis test éppen legalul van (és csak vízszintes irányban mozog):

$$mgR = \frac{mu^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} + \frac{\Theta \omega^2}{2},$$

ahol ω a cső szögsebessége, és a tiszta gördülés miatt $v = \omega R$.

Az egyenletekből kifejezhetjük a kis test és a cső sebességét abban a pillanatban, amikor a kis test épp legalul van:

$$u = 2\sqrt{\frac{MgR}{2M+m}}, \quad v = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{MgR}{2M+m}}.$$

Vizsgáljuk a kis test mozgását a cső tömegközéppontjával együttmozgó vonatkoztatási rendszerben: itt a kis test R sugarú pályán körmozgást végez. A pálya legalján a sebessége $v_{\text{rel}} = u + v$, centripetális gyorsulása pedig

$$a_{\text{cp}} = \frac{v_{\text{rel}}^2}{R} = \frac{(u+v)^2}{R}.$$

Ebben a pillanatban a cső gyorsulása nulla, így a kis test gyorsulása a talajhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben is ugyanekkora. Így a kis testre vonatkozó mozgásegyenlet: $ma_{\text{cp}} = F - mg$, amiből a keresett F erő:

$$F = 3mg \left(1 + \frac{m}{3M}\right).$$

B rész. 1) A termodinamika első főtétele alapján a gáz által felvett δQ hő

$$\delta Q = nC_V dT + p dV,$$

a keresett C moláris hőkapacitás pedig

$$C = \frac{1}{n} \frac{\delta Q}{dT} = C_V + \frac{p}{n} \frac{dV}{dT}.$$

Az egyenletekben C_V az állandó nyomáson mért moláris hőkapacitás, p , n , V és T pedig a buborékban lévő gáz nyomása, mólszáma, térfogata és hőmérséklete.

A Laplace-képlet alapján

$$p = \frac{4\sigma}{r},$$

és eszerint a buborékban lévő gáz állapotváltozása egy olyan politropikus folyamat, melyre $p^3V = \text{állandó}$. Ezt összevetve az ideális gáz $pV = nRT$ állapotegyenletével kapjuk, hogy

$$T^3V^{-2} = \text{állandó},$$

amit differenciálva

$$\frac{dV}{dT} = \frac{3V}{2T}.$$

Behelyettesítve ezt az eredményt a moláris hőkapacitás képletébe:

$$C = C_V + \frac{p}{n} \frac{3V}{2T} = C_V + \frac{3}{2}R,$$

majd felhasználva, hogy a kétatomos gáz állandó térfogaton mért moláris hőkapacitása

$$C_V = \frac{5}{2}R,$$

a keresett moláris hőkapacitás

$$C = \frac{5}{2}R + \frac{3}{2}R = 4R = 33,2 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}.$$

2) Mivel a gáz hőkapacitása sokkal kisebb, mint a buborék hőkapacitása, valamint a gáz és a buborék között jó hőkontaktus van, a gáz állapotváltozása izotermikusnak tekinthető.

Egyensúlyi állapotban a gáz p nyomása megegyezik az r sugarú buborék p_g görbületi nyomásával:

$$p = p_g = \frac{4\sigma}{r}.$$

Tekintsük a szappanhártya kicsiny A felületű darabját. Ennek tömege

$$m = \rho Ah.$$

Ha a buborék sugarának kicsiny megváltozását x -szel jelöljük, akkor a felületdarabkára felírt mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x} \approx (p' - p'_g)A,$$

ahol p' a gáz nyomása, p'_g a görbületi nyomás az $r + x$ sugarú buborékban.

Az izotermikus állapotváltozás miatt $p'V' = pV$, amiből

$$p' = p \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{r}\right)^3} \approx p \left(1 - \frac{3x}{r}\right) = p_g \left(1 - \frac{3x}{r}\right).$$

A görbületi nyomás

$$p'_g = \frac{4\sigma}{r + x} \approx p_g \left(1 - \frac{x}{r}\right).$$

Behelyettesítve a mozgásegyenletbe:

$$\rho Ah \ddot{x} = p_g \left(-\frac{2x}{r}\right) A, \quad \ddot{x} = -\frac{8\sigma}{\rho h r^2} x,$$

amiből a rezgés körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho h r^2}} = 108 \text{ s}^{-1}.$$

C rész. I. megoldás: Abban a pillanatban, amikor a tekercseken át folyó áram maximális, a tekercseken nem esik feszültség. Emiatt a két kondenzátoron azonos nagyságú, ellentétes feszültségnek kell esnie. Jelöljük ebben a pillanatban a kondenzátorok feszültségét U -val, a maximális áramerősséget pedig I_0 -lal.

A töltésmegmaradás miatt $q_0 = 2CU + CU$, amiből a kondenzátorok feszültsége

$$U = \frac{q_0}{3C}.$$

Az energiamegmaradás alapján

$$\frac{q_0^2}{4C} = \frac{LI_0^2}{2} + \frac{2LI_0^2}{2} + \frac{CU^2}{2} + \frac{2CU^2}{2},$$

amiből pedig a maximális áram

$$I_0 = \frac{q_0}{3\sqrt{2LC}}.$$

Miután a K kapcsolót bezárjuk két, egymástól független rezgőkör alakul ki. Mindkét rezgőkör körfrekvenciája

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}.$$

Az egyes rezgőkörökben a rezgés amplitúdóját, azaz az áramerősségeket $\hat{I}_1$ és $\hat{I}_2$ maximumát az energiamegmaradás alapján határozhatjuk meg:

$$\frac{2CU^2}{2} + \frac{LI_0^2}{2} = \frac{L\hat{I}_1^2}{2}, \quad \frac{CU^2}{2} + \frac{2LI_0^2}{2} = \frac{2L\hat{I}_2^2}{2},$$

amiből $\hat{I}_1 = \sqrt{5}I_0$, $\hat{I}_2 = \sqrt{2}I_0$.

Ha az áram irányát mindkét áramkörben az óramutató járásával egyezőnek vesszük, a kapcsolón átfolyó áram: $I = I_1 - I_2$, ahol az I_1 és I_2 áramok időfüggése:

$$I_1(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad I_2(t) = D \cos \omega t + F \sin \omega t.$$

Az A és D konstansok meghatározásához írjuk fel a kezdeti feltételeket:

$$I_1(0) = A = I_0, \quad I_2(0) = D = I_0,$$

a B és F konstansok meghatározásához pedig a maximális áramerősségeket:

$$A^2 + B^2 = \hat{I}_1^2, \quad D^2 + F^2 = \hat{I}_2^2,$$

amiből

$$B = 2I_0, \quad F = -I_0.$$

Az F együttható negatív előjele azt fejezi ki, hogy a kapcsoló bekapcsolásának pillanatában a $2L$ induktivitású tekercs árama csökken.

Eszerint az egyes rezgőkörök áramának időfüggése:

$$I_1(t) = I_0(\cos \omega t + 2 \sin \omega t), \quad I_2(t) = I_0(\cos \omega t - \sin \omega t),$$

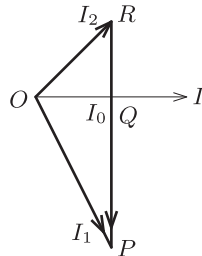
a kapcsolón átfolyó áram időfüggvénye pedig:

$$I(t) = I_1(t) - I_2(t) = 3I_0 \sin \omega t.$$

Ebből a keresett maximális áramerősség:

$$I_{\max} = 3I_0 = \omega q_0 = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$

II. megoldás: Az A , B , D és F állandók meghatározása helyett a maximális áramerősséget a 2. ábrán látható vektordiagramból is meghatározhatjuk. A keresett $I_{\max}$ áramerősség nagyságát a PR szakasz hossza határozza meg.



2. ábra. Vektorábra a maximális áram meghatározásához

A kapcsoló bekapcsolásakor az I_1 áram növekszik, mert a $2C$ kapacitású kondenzátor továbbra is kisül, míg az I_2 áram csökken, hiszen a C kapacitású kondenzátor tovább töltődik. Emiatt az I_1 és I_2 áramokat az OP , illetve az OR vektorok ábrázolják. A vektorok hossza az *I. megoldás* alapján $\sqrt{5}I_0$, illetve $\sqrt{2}I_0$. A kapcsoló bekapcsolásakor mindkét áram nagysága I_0 , ami az ábrán éppen az OQ szakasz hossza.

A Pitagorasz-tétel alapján ebből:

$$PQ = \sqrt{OP^2 - OQ^2} = 2I_0, \quad QR = \sqrt{OR^2 - OQ^2} = I_0,$$

ebből pedig a keresett maximális áramerősség:

$$I_{\max} = PR = 3I_0 = \omega q_0 = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$

III. megoldás: Mivel a két rezgőkör körfrekvenciája megegyezik, a kapcsolón átfolyó áram körfrekvenciája is ugyanakkora lesz. A kapcsoló zárásakor a rajta átfolyó áram értéke nulla, így a kapcsolón át folyó I áram időfüggvénye:

$$I(t) = I_{\max} \sin \omega t, \quad \text{ahol} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}.$$

Mivel a kapcsoló zárásakor ez az áram nulla

$$I_{\max} = \frac{\dot{I}}{\omega},$$

ahol $\dot{I}$ az áram idő szerinti deriváltjának értéke a bekapcsolás pillanatában.

Legyen egy adott pillanatban a $2C$ kapacitású kondenzátor töltése q_1 . Ekkor a másik kondenzátor töltése a töltésmegmaradás miatt $q_2 = q_0 - q_1$ lesz. A kapcsoló zárása után

$$\dot{I}_1 = \omega^2 q_1, \quad \dot{I}_2 = -\omega^2 (q_0 - q_1).$$

A kapcsolón átfolyó áram idő szerinti deriváltja

$$\dot{I} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = \omega^2 q_0,$$

amiből pedig a keresett maximális áram:

$$I_{\max} = \frac{\dot{I}}{\omega} = \omega q_0 = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$

Ebből a megoldásból az is látszik, hogy a maximális áram értéke független a kapcsoló zárásának időpontjától.