

Megoldás. a) Legyen a lencse és a tárgy távolsága t , a szemünk és a lencse távolsága $d - t$, ahol $d = 30$ cm, a lencse fókusz-távolsága f , a tárgy lencse által alkotott képének az előjeles, t -vel ellenkező irányú távolsága a lencsétől k , a tárgy nagysága T , a kép előjeles nagysága pedig K .

A leképezési törvény értelmében:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}, \quad k = \frac{tf}{t-f}, \quad \frac{K}{T} = \frac{k}{t}.$$

Lencse nélkül a tárgyat d távolságban T nagyságban látjuk, de a látásunk szempontjából nem ez a méret a lényeges, hanem az, hogy mekkora φ szög alatt látjuk a tárgyat. A látószöget a $\tan \varphi = T/d$ hányadossal jellemezhetjük, ezzel arányos méretű kép keletkezik a retinánkon, tehát ez határozza meg a szemünk által érzékelt képméretet.

A lencse által alkotott kép és a szemünk távolsága $d - t - k$ lesz, a kép nagysága pedig $-K$ (ha a T -vel egyező állású képet szeretnénk pozitív képmérettel jellemezni). A szögnagyítás mértéke az eredeti látószög és a lencse által alkotott kép látószögének aránya:

$$\begin{aligned} N &= \frac{\frac{-K}{d-t-k}}{\frac{T}{d}} = \frac{-kd}{t(d-t-k)} = \frac{-\frac{tf}{t-f}d}{t(d-t-\frac{tf}{t-f})} = \\ &= \frac{fd}{(d-t)(f-t)+ft} = \frac{fd}{fd-td+t^2}. \end{aligned}$$

Látható, hogy $t = 0$ és $t = d$ esetén is $N = 1$, ahogy a feladat szövege is állította. $|N|$ akkor lesz a legnagyobb, ha a nevezőben szereplő $fd - td + t^2$ abszolút értéke a lehető legkisebb. Ha f pozitív és elég nagy, akkor ennek a másodfokú függvénynek $t = d/2 = 15$ cm-nél van minimuma. Amennyiben a $d^2 - 4fd$ diszkrimináns pozitív, azaz $f \leq d/4$, akkor $t^2 - td + fd$ -nek van zérushelye, ebben az esetben N végtelen nagy lehet (bár ilyenkor nem látunk semmit, mert a lencse által létrehozott kép éppen a szemünkönél lesz), és ha $t^2 - td + fd$ negatív, akkor fejjel lefelé látjuk a tárgyat.

Ha f negatív (tehát szórólencséről van szó), akkor a másodfokú függvénynek nem lesz gyöke $t = 0$ és $t = d$ között, hiszen ezen két határhelyzetben az értéke fd , tehát negatív, és a függvény képe egy felfelé nyitott parabola. Ekkor $t = d/2$ -nél a nevező abszolút értékének maximuma van, tehát a feladattal ellentétben a lencsén keresztül a tárgyat nem nagyobbak, hanem kisebbnek látjuk.

b) $t = d/2$ mellett $N = 2$ akkor teljesül, ha:

$$2 = \frac{fd}{fd - td + t^2} = \frac{fd}{fd - \frac{d}{2}d + \frac{d^2}{4}} = \frac{f}{f - \frac{d}{4}},$$

ahonnan $f = d/2 = 15$ cm. Ez azt jelenti, hogy a tárgy éppen a lencse fókuszpontjában van, így a képe a „végtelenbe” kerül, de ez nem baj, mert a lineáris mérete (K) is végtelen nagyvá válik, miközben a látószöge (és annak tangense) véges nagyságú marad.