

Megoldás. A Gauss-féle fluxustörvény segítségével megállapíthatjuk, hogy a szigetelő szál hengerszimmetrikus elektromos térnek távolságfüggése:

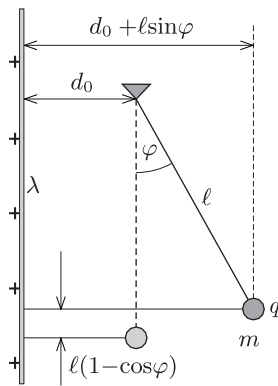
$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}.$$

Célszerű a golyó helyzetét a kitérülés φ szögével jellemezni (1. ábra). Ezzel kifejezve

$$\Delta E_{\text{helyzeti}} = mg\ell(1 - \cos \varphi),$$

az elektrosztatikus erőter által végzett munka pedig

$$W = \int_{d_0}^{d_0 + \ell \sin \varphi} qE(r) dr = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{d_0}^{d_0 + \ell \sin \varphi} \frac{1}{r} dr = \frac{Q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d_0 + \ell \sin \varphi}{d_0}.$$



1. ábra

Megjegyzés. Kihasználtuk, hogy az $1/x$ függvény a és b határok közötti integrálja (grafikonjának görbe alatti területe) $\ln(b/a)$. Ezt a képletet használjuk többek között a gázok izoterm tágulásakor végzett munka kiszámításánál is; lásd a Függvénytáblázat 32. és 140. oldalát!

A fémgolyó mozgási energiáját a φ szöggel jellemzett helyzetben a munkatétel segítségével adhatjuk meg:

$$W = \Delta E_{\text{helyzeti}} + \Delta E_{\text{mozg.}}$$

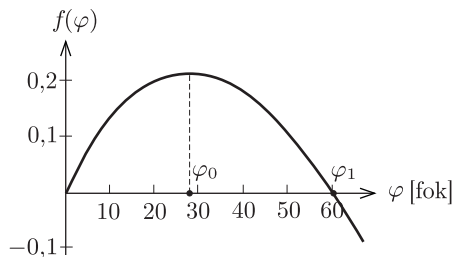
Mivel a test sebessége az induláskor nulla volt,

$$\begin{aligned} E_{\text{mozg.}} &= W - \Delta E_{\text{helyzeti}} = mg\ell \left(\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 mg\ell} \ln \frac{d_0 + \ell \sin \varphi}{d_0} - 1 + \cos \varphi \right) \equiv \\ &\equiv mg\ell \cdot f(\varphi). \end{aligned}$$

Az itt szereplő $f(\varphi)$ függvény, amely a feladatban szereplő szám adatok mellett

$$f(\varphi) = \frac{1}{2} \ln(1 + 2 \sin \varphi) - 1 + \cos \varphi$$

alakú, grafikonját a 2. ábra mutatja. Ennek a függvénynek $\varphi_1 > 0$ zérushelye éppen a fémgolyó megállásának (tehát az a) kérdésben szereplő legnagyobb eltávolodásnak) megfelelő szög, a φ_0 maximumhelye pedig a b) kérdésre adja meg a választ.



2. ábra

Megjegyzés. A grafikus ábrázolást könnyen megoldhatjuk a

<http://www.wolframalpha.com/>

címen található Wolfram Alpha program segítségével. Esetünkben a

`plot cos(pi x/180)-1+(1/2) ln(1+2sin(pi x/180)), 0<x<90`

beírása után vázlatos képet kapunk a vizsgálandó függvényről. A zérushely pontosabb számértéke a

`solve cos(pi x/180)-1+(1/2) ln(1+2sin(pi x/180))=0, 0<x<90,`

a szélsőérték pedig a

`maximum cos(pi x/180)-1+(1/2) ln(1+2sin(pi x/180)), 0<x<90`

utasításokkal kapható meg.

Függvények rajzolásához (és még sok máshoz) jól használható az ingyenesen letölthető *GeoGebra* matematikai program is.

A grafikus és numerikus vizsgálat szerint a zérushely $\varphi_1 \approx 60,2^\circ$ -nél található, így a golyó legnagyobb eltávolodása a fémszáltól: $d_{\max} = d_0 + \ell \sin \varphi_1 \approx 13,67$ cm, a legnagyobb sebességhez tartozó szög pedig $\varphi_0 \approx 27,4^\circ$.