

**Megoldás.** a) A testek a pályájuk legalacsonyabb pontjánál, a felfüggesztés alatt fognak ütközni, hiszen az azonos hosszúságú fonálingák lengésideje független a nehezeik tömegétől. Az ütközés előtt a két test sebessége ellentétes irányú és ugyanakkora,

$$(1) \quad v = \sqrt{2g\ell}$$

nagyságú.

$$(2) \quad Mv - mv = mu - MU,$$

$$(3) \quad \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MU^2 + \frac{1}{2}mu^2.$$

A számolás egyszerűsítése érdekében célszerű bevezetni a

$$\frac{M}{m} = x, \quad \frac{u}{v} = y, \quad \frac{U}{v} = z$$

dimenziótlan arányszámokat. Ezekkel – némi algebrai átalakítás után – (2) és (3) így írható:

$$(2') \quad x(z + 1) = 1 + y,$$

$$(3') \quad x(z^2 - 1) = 1 - y^2.$$

Ennek az egyenletrendszernek nyilvánvaló megoldása  $y = z = -1$ , ami annak felelne meg, hogy a két golyó ütközésmentesen mozog tovább. Ezt a lehetőséget kizárhatjuk, és eloszthatjuk (3')-t (2')-vel:

$$(4) \quad z - 1 = 1 - y.$$

Innen  $z$  kiküszöbölése után (2') felhasználásával az  $u/v$  arányra

$$y = \frac{3x - 1}{x + 1},$$

az  $m$  tömegű golyó sebességére pedig az

$$(5) \quad u = \frac{3x - 1}{x + 1} \sqrt{2g\ell} = \frac{3M - m}{M + m} \sqrt{2g\ell}$$

érték adódik.

Tételezzük fel, hogy az  $m$  tömegű golyó eljut a fonál által megengedett legmagasabb pontba, ez a felfüggesztési pont felett  $\ell$  magasságban található. Ebben a pontban a golyó  $u'$  sebességére (az energiamegmaradás tétele szerint) fennáll:

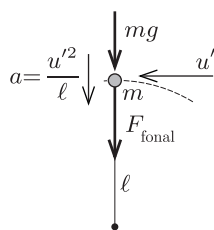
$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mu'^2 + 2g\ell,$$

tehát

$$(6) \quad u' = \sqrt{u^2 - 4g\ell}.$$

Ha  $u'$  nem elég nagy, akkor a fonál meglazul, és a golyó nem jut el a legfelső pontba. A pálya legfelső pontjában (lásd a 2. ábrát) a fonalat feszítő erő (Newton mozgásegyenlete szerint)

$$(7) \quad F_{\text{fonal}} = m \frac{u'^2}{\ell} - mg \geq 0.$$



2. ábra

(Belátható, hogy (7) teljesülése esetén a pálya minden pontjában feszes marad a fonal.) A (7) egyenlőtlenséget (6)-ba helyettesítve az  $u^2 > 5g\ell$  megszorítást kapjuk, amit (5)-tel összevetve a keresett tömegarányra végül az

$$x = \frac{M}{m} \geq \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{3\sqrt{2} - \sqrt{5}} \approx 1,82$$

korlátot kapjuk.

b) Vizsgáljuk meg, milyen magasra jut el a  $M$  tömegű test, ha a tömegek aránya éppen a kritikus érték! Az (5) összefüggésből kiszámíthatjuk, hogy  $y = 1,58$ , (4)-ből pedig a  $M$  tömegű test ütközés utáni sebességét:

$$z = 2 - y = 0,42; \quad U = 0,42 \sqrt{2g\ell}.$$

(Mivel  $U > 0$ , a test ténylegesen az 1. ábrán látható irányban, „visszafelé” mozog az ütközés után.) A test további mozgására felírható az energiamegmaradás törvénye:

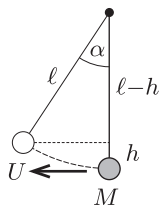
$$\frac{mU^2}{2} = mgh,$$

ahonnan az emelkedés magassága:

$$h = \frac{U^2}{2g} = 0,175 \ell,$$

ami a 3. ábrán látható emelkedési szöget is meghatározza:

$$\alpha = \arccos \frac{\ell - h}{\ell} \approx 34,4^\circ.$$



3. ábra