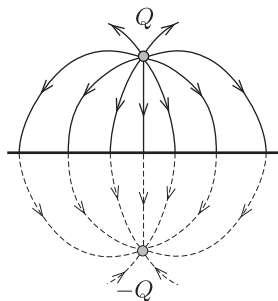
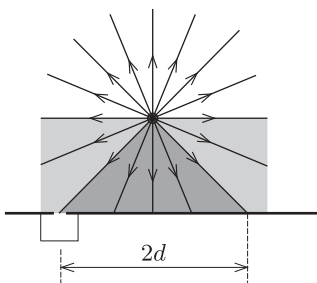


I. megoldás. Tekintsük először azt az esetet, amikor a vezetékkel összekötött két fémlemez *földelt*, tehát a töltések szabadon távozhatnak a lemezekről, vagy éppen oda áramolhatnak. (A feladatban ez *nem teljesül*, mégis tanulságos lesz, ha először ezzel a problémával foglalkozunk.) Ebben az esetben a Q ponttöltés hatására a nagy kiterjedésű (végtelen nagynak tekinthető) lemez felett olyan elektromos tér alakul ki, mintha a lemez túloldalán, Q tükörképének helyén egy $-Q$ nagyságú „tükörtöltés” helyezkedne el (1. ábra).

A lemezen kialakuló töltésseloszlást (töltéssűrűséget) az elektromos térerősségnek a fémfelület határánál kialakuló értéke határozza meg. A fémlemez valamekkora területén felhalmozódó töltés mennyisége arányos az adott területre befutó erővonalak számával. A teljes (földelt) fémlemezre összesen $-Q$ töltés kerül, hiszen mindegyik erővonal valahol eléri a „végtelen nagy” lemezpárt. Az elektromos erőteret a valódi töltés és a tükörtöltés terének összegeként állíthatjuk elő. Ugyanez igaz az erővonalszámokra is: a lemez valamely darabkáján átmenő erővonalszám a valódi töltésből, illetve a tükörtöltésből származó erővonalszám összege. Mivel azonban ezek egymással egyenlőek, a teljes elektromos fluxus a valódi (Q nagyságú) ponttöltés fluxusának kétszerese.



1. ábra



2. ábra

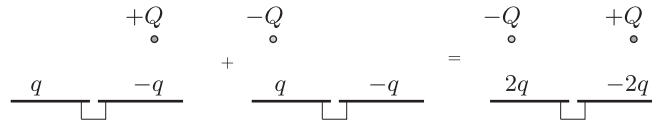
Vizsgáljuk meg, hogy a Q nagyságú ponttöltésből kiinduló erővonalaknak mekkora hányada halad át a töltés „alatti” $2d$ széles sávon, és mennyi a lemez többi részén! Mivel az összes erővonal fele éri el a fémlemez, és ezek fele halad át a $2d$ széles sávon (2. ábrán ez a sötétebben jelölt tartomány, pontosabban annak síkmetszete), továbbá a tükörtöltés járuléka is éppen ugyanennyi, megállapíthatjuk, hogy a $2d$ széles sávba $-Q/2$, a rajta kívül eső területekre egyenként $-Q/4$ töltés kerül.

A bal oldali lemezen tehát $-Q/4$ töltés, a jobb oldalin pedig $-3Q/4$ töltés halmozódna fel, ha a lemezek földelték lennének. De nem azok! A két (eredetileg töltetlen) lemez nem végtelen, hanem csak „nagyon” nagy, emiatt az össztöltésük a megosztás után is nulla marad.

Ha az eddig számolt töltés-értékekhez mindkét oldalon $+Q/2$ -t hozzáadunk (mindkét lemezre ekkora töltést viszünk), akkor megkapjuk az eredeti feladat megoldását: a bal oldali lemez töltése $+Q/4$, a jobb oldali lemezé pedig $-Q/4$ lesz.

Megjegyzés. Ha a Q töltést elfelezzük, és az egyik fél töltést a lemezeket elválasztó keskeny réssel párhuzamos irányban valamennyire elmozdítjuk, a fémlemezekben a töltések átrendeződnek, de az egyes lemezekben levő összes töltés mennyisége *nem* változik meg. Ezt az eljárást sokszor megismételve a Q töltést akár teljesen szét is „kenhetjük” egy hosszú, egyenes szigetelő pálca mentén, és ezzel a feladatot kétdimenzióssá alakíthatjuk. A 2. ábra ekkor még meggyőzőbben mutatja, hogy ha a Q töltés egymaga lenne csak jelen, a belőle kiinduló erővonalakból háromszor több jut a jobb oldali lemezre, mint amennyi a bal felől levő lemezen áthalad. Ugyanez igaz a tükörtöltésekre is, tehát a két fémlemez eredő töltésaránya is $3 : 1$ lenne, ha a lemezeket leföldelnénk.

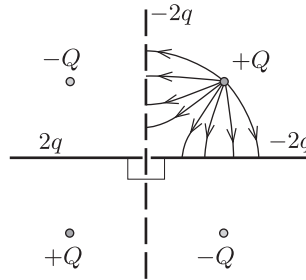
II. megoldás. Jelöljük a jobb oldali fémlemezre jutó töltés mennyiségét $-q$ -val, ekkor a bal oldali lemez töltése a megosztás hatására nyilván $+q$ lesz. Helyezzünk el most $-Q$ töltést a 3. ábrán látható helyre, ez a bal oldali lemezen hoz létre $+q$ töltést és a jobb oldali lemezre juttat $-q$ töltést. A két elrendezés szuperponálható, az eredményt ugyancsak a 3. ábra mutatja.



3. ábra

A szuperponált elrendezés elektromos terét is a töltéstükrözés módszerével határozhatjuk meg (4. ábra). A szaggatott vonallal jelölt sík – a ténylegesen ott lévő fémlemezekhez hasonlóan – ugyancsak ekvipotenciális, tehát a helyére akár egy valóságos fémlemez is tehetnénk. A szimmetria miatt ezen lemez felső felén is $-2q$ töltés jelenik meg, és mivel a Q töltésből kiinduló erővonalak mindegyike valamelyik félsíkra érkezik,

$$-2q - 2q = -Q, \quad \text{azaz} \quad q = Q/4.$$



4. ábra

Ezzel megoldottuk az eredeti feladatot is: a Q töltéshez közelebbi lemezen $-Q/4$, a távolabbin pedig $+Q/4$ töltés jelenik meg az elektromos megosztás hatására.

Megjegyzés. Sok versenyző a töltéstükrözéses módszer segítségével zárt alakban megadta az elektromos térerősség képletét a fémlemezek felületénél, majd ezen kétváltozós függvény ún. felületi integrálásával határozta meg (vagy próbálta meghatározni) a lemezek töltését. Többben az interneten hozzáférhető matematikai programokat hívták segítségül, de volt aki megjegyezte, hogy ez a művelet meghaladja a középiskolások matematikai ismereteit.

Felsőbb matematikai módszerek alkalmazása megengedett, de nem várható el a pontversenyben kitűzött feladatok megoldásánál. Ha a versenyző ilyen nehézségekkel találja szemben magát, gondoljon arra, hogy a feladatnak biztosan van *elemi megoldása* is (ellenkező esetben nem tűzték volna ki a KöMaL-ban!), és a technikai részletek további bonyolítása helyett próbáljon rátalálni az egyszerű megoldásra.