

Megoldás. *a)* A folyamatban a gáz tágulása adiabatikus (hiszen a henger fala is és a dugattyú is hőszigetelő), így a nehezék legmélyebb helyzetéhez tartozó állapotra érvényes:

$$(1) \quad p_0 V_0^\kappa = p_1 V_1^\kappa.$$

(Mivel levegőről van szó: $\kappa = 1,4$.) Innen a levegő nyomása a kérdéses helyzetben:

$$p_1 = p_0 \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^\kappa = p_0 \left(\frac{\ell_0}{\ell_1} \right)^\kappa,$$

ahol $\ell_0 = V_0/A$ és $\ell_1 = V_1/A$ a dugattyú legkisebb, illetve legnagyobb távolságát jelöli a henger lezárt szélétől.

Amikor a nehezék a legmélyebbre ér, sebessége (és így a mozgási energiája is) éppen nulla. Alkalmazzuk a munkatételt a rendszer kezdeti állapota és a dugattyú visszafordulása közötti folyamatra:

$$\Delta E = W_1 + W_2,$$

ahol

$$(2) \quad \Delta E = \frac{p_1 V_1 - p_0 V_0}{\kappa - 1} = A p_0 \frac{\left(\frac{\ell_0}{\ell_1} \right)^\kappa \ell_1 - \ell_0}{\kappa - 1}$$

a gáz belső energiájának megváltozása, $W_1 = mg(\ell_1 - \ell_0)$ a súlyra ható nehézségi erő munkája, $W_2 = -p_0 A(\ell_1 - \ell_0)$ pedig a külső légnyomás munkája (ez nyilván negatív). Ezekkel és az $x = \ell_1/\ell_0$ dimenziótlan változó bevezetésével (2) így írható:

$$(3) \quad \frac{1}{x^{0,4}} - 1 + K \cdot (x - 1) = 0,$$

ahol a feladat számadataival

$$K = 0,4 \cdot \left(1 - \frac{mg}{A p_0} \right) \approx 0,30.$$

A (3) egyenlet nyilvánvaló, de számunkra érdektelen megoldása $x = 1$, ez a kezdeti állapotnak felel meg (a dugattyú sebessége itt is nulla). A másik gyök numerikusan (fokozatos közelítésekkel), vagy (3) bal oldalának grafikus ábrázolásával található meg: $x \approx 1,48$, ez $\ell_1 \approx 1,18$ m-nek, vagyis $V_1 \approx 11,8$ liternek felel meg. A térfogatból (1) alapján számolható a nyomás:

$$p_1 = p_0 \frac{1}{x^{1,4}} \approx 0,57 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

a gáztörvényből pedig a hőmérséklet határozható meg: $T_1 = 256 \text{ K} = -17^\circ \text{C}$.

b) A dugattyú és a nehezék (mivel ugyanakkora a gyorsulásuk) egyetlen testként kezelhető, amelynek mozgásegyenletében a fonálerőt (mint belső erőt) nem kell figyelembe vevünk. A dugattyú a legszélső helyzetéből

$$a = \frac{(p_0 - p_1)A - mg}{m} \approx 7,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

gyorsulással indul el visszafelé.

c) Amikor a dugattyú sebessége maximális, akkor a gyorsulása nulla. Ebben az állapotban a levegő p_2 nyomására fennáll:

$$(p_0 - p_2)A - mg = 0, \quad \text{ahonnan} \quad p_2 \approx 0,75 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

és a megfelelő térfogat (1) alapján $V_2 \approx 9,8$ liter.

Most is felírhatjuk a munkatételt a levegő kezdeti állapota és a legnagyobb dugattyú-sebességhez tartozó állapota közötti folyamatra. A nehézségi erő munkája és a külső légnyomás által kifejtett erő munkája összességében nagyobb, mint a levegő belső energiájának megváltozása. A különbséget a nehezék $mv^2/2$ mozgási energiáját fedezi, innen a dugattyú maximális sebességére

$$v \approx 1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

érték adódik.