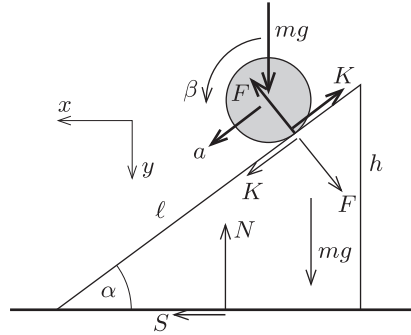


I. megoldás. Válasszuk az ábrán látható koordináta-rendszert, és jelöljük a hengerre, illetve a lejtőre ható erőket az ábrán látható betűkkel. (A hengerre ható erőket vastagabb, a lejtőre hatókat vékonyabb vonallal jelöltük.) A henger tömegközéppontjának gyorsulása legyen a , a henger sugara r , tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$, szöggyorsulása pedig (a csúszásmentes gördülés miatt) $\beta = a/r$.



A dinamika alapegyenletei a henger x és y irányú gyorsulására, illetve a forgómozgására:

$$\begin{aligned} (1) \quad & F \sin \alpha - K \cos \alpha = ma \cos \alpha, \\ (2) \quad & -K \sin \alpha - F \cos \alpha + mg = ma \sin \alpha, \\ (3) \quad & Kr = \frac{1}{2}mr^2 \frac{a}{r}. \end{aligned}$$

Tudjuk továbbá (a lejtőre megadott geometriai adatokból), hogy $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ és $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

A lejtőre is felírhatjuk komponensenként a dinamika alapegyenletét, ezek – mivel a lejtő nem gyorsul – az erők egyensúlyát fejezik ki:

$$\begin{aligned} (4) \quad & K \cos \alpha + S - F \sin \alpha = 0, \\ (5) \quad & mg + F \cos \alpha + K \sin \alpha - N = 0. \end{aligned}$$

Az (1)–(3) egyenletekből kiszámíthatjuk a henger és a lejtő között ható F nyomóerőt és K súrlódási erőt, valamint a henger középpontjának gyorsulását:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{3}g \sin \alpha = \frac{2}{5}g, \\ K &= \frac{1}{3}mg \sin \alpha = \frac{1}{5}mg, \\ F &= mg \cos \alpha = \frac{4}{5}mg. \end{aligned}$$

Ezeket (4)-be és (5)-be helyettesítve megkapjuk a talaj és a lejtő között ható erőket:

$$S = \frac{8}{25}mg \quad \text{és} \quad N = \frac{44}{25}mg.$$

A lejtő akkor nem csúszik meg a talajon, ha $S < \mu N$, vagyis ha a tapadási súrlódási együttható

$$\mu > \mu_{\min} = \frac{2}{11} \approx 0,18.$$

II. megoldás. Írjuk fel a munkatételt a h magas lejtőről leguruló hengerre! A lejtő alján a henger középpontjának sebessége legyen v , szögsebessége $\omega = v/r$.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\frac{v^2}{r^2} = \frac{3}{4}mv^2.$$

Másképp igaz, hogy ha a tömegközéppont gyorsulása a , a mozgás ideje t és a megtett út (a lejtő hossza) $h/\sin \alpha$, akkor

$$v = at \quad \text{és} \quad \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{a}{2}t^2.$$

Helyettesítsük be ezeket a kifejezéseket a munkatétel egyenletébe:

$$mg \frac{a}{2} t^2 \sin \alpha = \frac{3}{4} m (at)^2,$$

innen kapjuk, hogy a henger tömegközéppontjának gyorsulása:

$$a = \frac{2}{3} g \sin \alpha = \frac{2}{5} g.$$

Jelöljük a talaj és a lejtő között ható nyomóerőt N -nel, a súrlódási erőt pedig S -sel! Írjuk fel a lejtőből és a hengerből álló rendszerre Newton II. törvényét, vagyis azt, hogy a rendszer impulzusának időegységre eső megváltozása a rendszerre ható külső erővel egyenlő. A két testre összesen $2mg$ nagyságú, függőlegesen lefelé irányuló nehézségi erő és a talaj által kifejtett K és N erő hat. Az impulzusváltozás (mivel a lejtő nem mozdul meg) a henger tömegközéppontjának a gyorsulásából adódik, időegységenként ma nagyságú és a lejtő esésvonalával párhuzamos irányú.

A mozgásegyenletek:

$$S = ma \cos \alpha,$$

illetve

$$2mg - N = ma \sin \alpha.$$

Innen (a gyorsulás és a szögek nagyságának ismeretében) az erők könnyen kiszámíthatók:

$$S = \frac{8}{25} mg \quad \text{és} \quad N = \frac{44}{25} mg,$$

a súrlódási együttható minimális értéke pedig

$$\mu_{\min} = \frac{S}{N} = \frac{2}{11}.$$