I. megoldás. Ismert[1], hogy ha egy U_0 feszültségre feltöltött, C kapacitású kondenzátort R ellenálláson keresztül „kisütünk”, akkor a kondenzátor feszültsége időben az

$$U(t) = U_0\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

függvény szerint csökken, s az $U_0/2$ értéket

$$t_{1/2} = \ln 2 \cdot RC$$

idő alatt éri el. (Ezt az időtartamot a radioaktív bomlásoknál használt kifejezés mintájára nevezhetjük *felezési időnek.*)

Egy r_0 sugarú gömb (mint gömbkondenzátor) kapacitása:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\, r_0.$$

A töltött gömb körüli levegő vezetőképessége miatt a fémgömb fokozatosan elveszíti a töltését. A környező levegőt – gondolatban – a fémgömbbel koncentrikus, vékony gömbhéjakra oszthatjuk. Egy-egy gömbhéj vastagsága legyen Δr, felülete $4\pi r^2$ (r a gömbhéj átlagos sugara). Egy ilyen gömbhéj elektromos ellenállása (a radiálisan folyó áramokkal szemben):

$$\Delta R = \varrho \frac{\Delta r}{4\pi r^2},$$

a sok-sok „sorosan kapcsolt” gömbhéj eredő ellenállása pedig

$$R = \sum \Delta R = \frac{\varrho}{4\pi} \sum \frac{\Delta r}{r^2}.$$

A fenti összeg (a gömbhéjak vastagságát fokozatosan csökkentve) egy integrállal számítható ki:

$$R = \frac{\varrho}{4\pi} \int_{r_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{\varrho}{4\pi r_0}.$$

(Az integrál értékét a matematikai analízis megfelelő összefüggéseinek alkalmazásával, vagy a Coulonb-erőtér és a Coulomb-potenciál hasonló képleteivel való analógia alapján határozhatjuk meg.)

A fenti összefüggések alapján a kondenzátor feszültségének felezési ideje:

$$t_{1/2} = \ln 2 \cdot \frac{\varrho}{4\pi r_0} \cdot 4\pi\varepsilon_0\, r_0 = \ln 2\, \varrho\varepsilon_0 \approx 1{,}2 \cdot 10^5\ \mathrm{s} \approx 34\ \text{óra}.$$

Érdekes, hogy a felezési idő nem függ a fémgömb méretétől, csupán a levegő vezetőképessége és egy univerzális természeti állandó határozza meg azt.

II. megoldás. Legyen a gömbön levő töltés pillanatnyi értéke $q(t)$ (ez nyilván arányos a pillanatnyi feszültséggel). Ebben a pillanatban a gömb külső felszínén az elektromos térerősség (amely merőleges a felületre)

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

ahol r a gömb sugara. Az Ohm-törvény differenciális alakja szerint a felületen az áramsűrűség (amely ugyancsak merőleges a felületre):

$$j = \frac{E}{\varrho} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varrho r^2}.$$

Így a töltés csökkenésének „üteme” (vagyis a teljes áramerősség)

$$-\frac{\Delta q(t)}{\Delta t} = i = 4\pi r^2 j = \frac{1}{\varepsilon_0 \varrho} \cdot q(t).$$

Ez az egyenlet (amely egy elsőrendű differenciálegyenlet) az alakját tekintve éppen olyan, mint a radioaktív bomlások

$$-\frac{\Delta m(t)}{\Delta t} = \lambda \cdot m(t)$$

törvénye, így a megoldása is ugyanolyan formájú:

$$q(t) = q_0\, e^{-\frac{t}{\varepsilon_0 \varrho}}.$$

[1] Lásd pl. a „Négyjegyű függvénytáblázatok” Kondenzátor feltöltése és kisülése ohmos ellenálláson át c. részt a 2., javított kiadás 148. oldalán

A töltés (s így a feszültség) felezési ideje innen már könnyen kifejezhető. A

$$q(t_0) = \frac{q_0}{2}$$

összefüggésből

$$\frac{1}{2} = \exp\left(-\frac{t_0}{\varepsilon_0 \varrho}\right), \quad \text{vagyis} \quad t_0 = \ln 2 \cdot \varepsilon_0 \varrho = 1.23 \cdot 10^5 \text{ s}$$

következik, ennyi idő alatt veszíti el a fémgömb a töltéseinek felét.

Megjegyzés. A II. megoldás gondolatmenetét követve látszik, hogy a feltöltött fémtest töltésének fogyási üteme – és így annak felezési ideje – nem függ a test méreteitől, de még az alakjától sem.