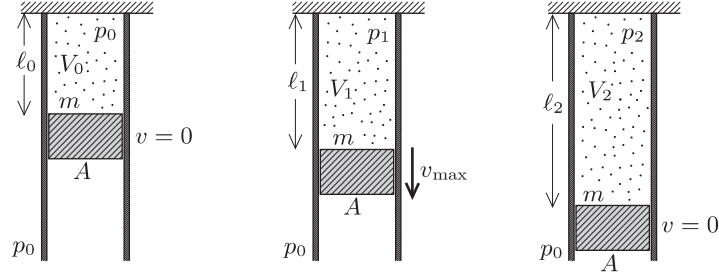


Megoldás. A hengerben hélium (nemesgáz) van, molekuláinak szabadsági foka $f = 3$, a gáz fajhőhányadosa pedig

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{5}{3}.$$

A hengerben levő gáz tágulása – a hőszigetelt fal és dugattyú miatt – adiabatikusnak tekinthető, és a $pV^\kappa = \text{állandó}$ állapotegyenlettel írható le.

Az alábbi *ábrásor* a rendszer három jellegzetes állapotát mutatja. A dugattyú álló helyzetéhez tartozó állapotot 0-ás, a maximális sebességhez tartozó állapotot 1-es, a gázoszlop maximális hosszához tartozó állapotot pedig 2-es indexű mennyiségekkel írjuk le.



a) A rögzítés megszüntetése után a dugattyú gyorsulni kezd lefelé, hiszen a dugattyúra ható eredő erő nem nulla ($p_0A + mg > p_0A$). A sebesség mindaddig nő, amíg az eredő erő nullától különböző. A sebesség legnagyobb értékénél

$$p_1A + mg = p_0A,$$

vagyis

$$p_1 = p_0 - \frac{mg}{A} \approx 80 \text{ kPa}.$$

Az adiabatikus állapotváltozás miatt

$$p_0V_0^\kappa = p_1V_1^\kappa, \quad \text{azaz} \quad p_0(\ell_0A)^\kappa = p_1(\ell_1A)^\kappa,$$

ahonnan

$$\ell_1 = \ell_0 \cdot \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = 0,5 \text{ m} \cdot \left(\frac{100}{80}\right)^{0,6} \approx 0,57 \text{ m}.$$

A dugattyú tehát kb. 7 cm-nyi süllyedés után éri el a legnagyobb sebességét.

b) Írjuk fel a hőtan I. főtétele a héliumgáz 0-ás és 1-es jelzésű állapota között végbemenő folyamatra:

$$Q = \Delta E_{\text{belső}} + W',$$

ahol Q a gázzal közölt hő (esetünkben nulla), W' pedig a gáz által végzett munka. Eszerint – az ideális gáz állapotegyenleteit is felhasználva – a gáz munkavégzése:

$$W' = -\Delta E_{\text{belső}} = -\frac{f}{2}nR\Delta T = -\frac{f}{2}(nRT_1 - nRT_0) = -\frac{f}{2}(p_1V_1 - p_0V_0).$$

Az ismert és a fentebb kiszámított adatok behelyettesítése után kapjuk, hogy

$$W' = -\frac{3}{2}(80 \text{ kPa} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot 0,57 \text{ m} - 100 \text{ kPa} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot 0,50 \text{ m}) \approx 33 \text{ J}.$$

Alkalmazzuk még a munkatételt a dugattyú mozgására! Eszerint a dugattyú mozgási energiájának növekedése a dugattyúra ható erők munkájának összegével egyezik meg. Ez utóbbi három tagból (a gáz W' munkájából, a nehézségi erő munkavégzéséből és a dugattyút alulról nyomó külső légnyomás által végzett munkából) tevődik össze:

$$\frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2 = W' + mg(\ell_1 - \ell_0) - p_0A(\ell_1 - \ell_0).$$

Innen az adatok behelyettesítése után a dugattyú legnagyobb sebességére

$$v_{\text{max}} \approx 0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

adódik.

c) A gázoszlop legnagyobb hosszát ugyancsak a munkatétel és az I. főtétel, valamint az állapotegyenletek alkalmazásával határozhatjuk meg. A 2-es helyzetben a dugattyú sebessége nulla, a mozgási energiája tehát a kezdőállapothoz képest nem változott.

A munkatétel szerint:

$$0 = mg(\ell_2 - \ell_0) + W'' - p_0 A(\ell_2 - \ell_0),$$

ahol W'' a gáz által végzett munka a 0-ás és a 2-es jelzésű állapot között végbemenő folyamatra. A hőtan I. főtétele alapján:

$$W'' = -\Delta E_{\text{belső}} = -\frac{f}{2}(p_2 V_2 - p_0 V_0),$$

ahol $V_2 = \ell_2 A$ és (az adiabatikus állapotváltozás miatt)

$$p_2 = p_0 \left(\frac{\ell_0}{\ell_2} \right)^\kappa.$$

A fenti összefüggések végül a

$$\frac{2}{3} \left(\frac{mg}{p_0 A} - 1 \right) \left(\frac{\ell_2}{\ell_0} - 1 \right) = \left(\frac{\ell_2}{\ell_0} \right)^{-\frac{2}{3}} - 1$$

egyenlethez vezetnek, amely az ismert adatokkal és az $x = \ell_2/\ell_0$ jelölés bevezetésével így is írható:

$$-0,53(x - 1) = x^{-\frac{2}{3}} - 1.$$

Ennek egyik megoldása $x = 1$, ami számunkra érdektelen, hiszen az a kezdeti $\ell_2 = \ell_0$ helyzetnek felel meg. A keresett megoldás közelítő értéke pl. az egyenlet mindkét oldalának grafikus ábrázolásával kapható meg, és (akár egy zsebszámológéppel is) numerikusan pontosítható. (Kényelmes és gyors a wolframalpha.com internetes címen található egyenletmegoldó program használata is.) Az eredmény:

$$x \approx 1,3 \quad \Rightarrow \quad \ell_2 \approx 0,65 \text{ m.}$$